# Vorlesung 7, 05. Nov. 2018

## "Die natürliche Zahlen III"

Zur Erinnerung: Die natürliche Zahlen (mit Null) $\mathbb{N}_0$ sind induktiv definiert. Und das Hauptwerkzeug ist das Prinzip der Induktion.

```
def fact(n)
    ...
    ...
    return n·fact(n-1)
```

**Proposition 7.1** Es sei $\otimes : X \times X \to X$ eine assoziative Verknüpfung auf einer Menge. Dann kommt es auch bei mehr als drei Faktoren nicht auf die Klammerung an.

**Wichtig:** Assoziativität fordert nur Gleichheit für Ausdrücke der Länge 3, z.B. $(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$. Daraus folgt aber schon Gleichheit für alle Längen.

**Beweis:** Es sei $K_n$ eine "Klammerung der Länge n" für $n \geq 3$, d.h. für $a_1, \dots, a_n \in X$ eine beliebige Klammerung der Form $K_7 = ((a_1 \otimes a_2) \otimes (a_3 \otimes a_4)) \otimes ((a_5 \otimes (a_6 \otimes a_7)))$.
Nennen wir die Klammerung der Form

$$\overline{K}_n = (\cdots(a_1 \otimes a_2) \otimes a_3) \otimes \dots ) \otimes a_n \qquad n \geq 3$$

kanonisch.

**Behauptung:** Jede Klammerung $K_n$ ist gleich der kanonischen, i.e. $\overline{K}_n = K_n$.

**Beweis:** Durch Induktion.

(IA): Der Fall $n=3$ ist genau die Assoziativität.

(IS): Es sei $K_k = \overline{K}_k$ für $\forall\ 3 \le k \le n$, und sei $K_{n+1}$ ein Klammerausdruck der Länge $n+1$. Dann gibt es $l, m \in \mathbb{N}$ so, dass $K_{n+1} = K_l \circledast K_m$.

---

Fall 1: $m=1$, also $K_m = a_{n+1}$. Dann ist nach Induktion $K_l = \overline{K}_l$ und somit $K_{n+1} = K_l \circledast a_{n+1} = \overline{K}_{n+1}$

---

Fall 2: $m>1$. Dann ist nach Induktion $K_m = \overline{K}_{m-1} \circledast a_{n+1}$

Also
$$\begin{aligned} K_{n+1} &= K_l \circledast (\overline{K}_{m-1} \circledast a_{n+1}) \\ &\overset{\text{Asso.}}{=} (K_l \circledast \overline{K}_{m-1}) \circledast a_{n+1} \\ &= (\cdots(a_1 \circledast a_2) \circledast a_3) \cdots ) \circledast a_{n+1} \\ &= \overline{K}_{n+1} \end{aligned}$$

Nach Induktion

$\boxed{E}$

---

Bevor wir nun das Prinzip der Rekursion einführen ein motivierendes Beispiel.

---

## Beispiel 7.2

Die Fakultät ist die Abbildung

Schreibe $n! = !(n)$ für diese Abbildung

$$!: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \quad \begin{matrix} 0 \longmapsto 1 \\ n \longmapsto 1 \cdot \ldots \cdot n \end{matrix} \text{ für } n>0$$

Diese Abbildung wächst sehr schnell:

$0! = 1$; $1! = 1$; $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$; ...

$10! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot 10 > 3628000$, ..., $1000! > 4 \cdot 10^{2567}$ ...

Rekursive Definition: $3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0!$ ~~Rekursion~~ Rekursion

Start-bedingung $0! = 1$ und $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ für $n>0$

## Theorem 7.3 (Rekursionsprinzip)

Es sei $X \neq \emptyset$ und $a \in X$, genannt Startwert. Sei für $\forall n \in \mathbb{N}$ eine Abbildung $V_n : \underbrace{X \times \ldots \times X}_{n} = X^n \longrightarrow X$ gegeben.

Dann $\exists!\, f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow X$ so, dass

a) $f(0) = a$ Startbedingung

b) $f(n+1) = V_{n+1}(f(0), f(1), \ldots, f(n))$ $n \in \mathbb{N}$ Rekursion

---

Beweis: i) ~~Existenzbeweis~~ Eindeutigkeit durch Induktion.

Seien also $f, g : \mathbb{N}_0 \longrightarrow X$ zwei solche Abbildungen.

Behauptung: $f(n) = g(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$

Beweis: Durch Induktion.

(IA): $n = 0$ ist wegen a) wahr.

(IS): Sei also $f(k) = g(k)$ $\forall\, 0 \leq k \leq n$. Dann folgt wegen b), dass

$$f(n+1) = V_{n+1}(f(0), \ldots, f(n)) = V_{n+1}(g(0), \ldots, g(n)) = g(n+1).$$

ii) Existenzbeweis durch Induktion.

---

Behauptung(*): Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gibt es eine Abbildung $f_n : \{0, \ldots, n\} \rightarrow X$ mit

$$f_n(0) = a$$
$$f_n(k) = f_k(k) \qquad 0 \leq k < n$$
$$f_n(k+1) = V_{k+1}(f_n(0), \ldots, f_n(k)).$$

Beweis: ~~...~~ (IA): $n = 0$ ist wahr, da es kein $0 \leq k < 0$ gibt also $f_0 : \{0\} \rightarrow X$ keine Bedingung erfüllen muss.

(IS): Existiere nun eine solche Funktion für alle $0 \le k \le n$. Setze

$$f_{n+1} = \begin{cases} f_n(k), & 0 \le k \le n, \\ V_{n+1}(f_n(0), \dots, f_n(n)), & k = n+1. \end{cases}$$

Per Induktion folgt

$$\underbrace{f_{n+1}(k) = f_n(k) = f_k(k) \quad 0 \le k \le n}$$

und, zusammen mit folgt dann

$$f_{n+1}(k+1) = f_n(k+1) = V_{k+1}(f_n(0), \dots, f_n(k))$$
$$= V_{k+1}(f_{n+1}(0), \dots, f_{n+1}(k))$$

für $0 \le k+1 \le n$ und

$$f_{n+1}(n+1) = V_{n+1}(f_n(0), \dots, f_n(n))$$
$$= V_{n+1}(f_{n+1}(0), \dots, f_{n+1}(n)).$$

Das beweist die Behauptung (*).

---

Definiere nun $f: \mathbb{N}_0 \longrightarrow X$ durch

$$f(n) = \begin{cases} a, & n = 0, \\ f_n(n), & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Wegen Behauptung (*) gilt nun aber

$$f(n+1) = f_{n+1}(n+1) = V_{n+1}(f_{n+1}(0), \dots, f_{n+1}(n))$$
$$= V_{n+1}(f_0(0), \dots, f_n(n))$$
$$= V_{n+1}(f(0), \dots, f(n))$$

Dies beweist die Existenz der Abbildung $f$. $\boxed{Z}$

## Beispiel 7.4

Was man eigentlich will ist die Bedeutung von "…" in der Definition von $n! = 1 \cdot \ldots \cdot n$ zu klären.

Das geht wie folgt:

Setze $V_n : \mathbb{N}_0 \times \ldots \times \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$, $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \longmapsto y_{n-1} \cdot n$

Dann $\exists!\ f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ so, dass $f(0) = 1$ und

$$f(n) = V_n(f(0), \ldots, f(n-1)) = f(n-1) \cdot n$$

$\Rightarrow$ Das gilt die Fakultät.

---

## Beispiel 7.5

Allgemeiner als Beispiel 7.4. Sei $\circledast$ eine assoziative Verknüpfung auf einer Menge $X \neq \emptyset$. Und seien $x_k \in X$ für $k \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Um

$$\circledast_{k=0}^{n} x_k = x_0 \circledast \ldots \circledast x_n$$

zu definieren benutze die Abbildung

$$V_n : X^n \longrightarrow X, \quad (y_0, \ldots, y_{n-1}) \longmapsto y_{n-1} \circledast x_n$$

Dann $\exists!\ f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow X$ so, dass $f(0) = x_0$ und

$$f(n) = V_n(f(0), \ldots, f(n-1)) = f(n-1) \circledast x_n = \circledast_{k=0}^{n} x_k$$

$\Rightarrow$ Wir erhalten

Rekursion

$$\circledast_{k=0}^{0} x_k = x_0 \quad \text{und} \quad \circledast_{k=0}^{n+1} x_k = \circledast_{k=0}^{n} x_k \circledast x_{n+1}$$

Startbedingungen

## Beispiel 7.6

Wie in Beispiel 7.5 können wir ⊛ auch als

$+ : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ oder $\cdot : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$

wählen und erhalten rekursiv

$$\sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + \dots + x_n \quad \text{und} \quad \prod_{k=0}^{n} x_k = x_0 \cdot \ldots \cdot x_n$$

---

**Proposition 7.7** Sei ⊛ wie in Beispiel 7.5, aber zusätzlich kommutativ. Und sei $\sigma : \{0, \dots, n\} \to \{0, \dots, n\}$ eine Bijektion (Permutation $\hat{=}$ Umnummerierung).

Dann ist $\circledast_{k=0}^{n} x_k = \circledast_{k=0}^{n} x_{\sigma(k)}$

---

**Beweis**: Ausgelassen. (Induktion)

---

**Proposition 7.8** Seien $+, \cdot$ wie in Beispiel 7.6.

Dann gelten folgende Rechenregeln.

a) $\sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)$

b) $\prod_{k=0}^{n} a_k \cdot \prod_{k=0}^{n} b_k = \prod_{k=0}^{n} (a_k b_k)$

c) $\sum_{j=0}^{m} a_j \cdot \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{j=0}^{m} \left( \sum_{k=0}^{n} a_j b_k \right) = \sum_{k=0}^{n} \left( \sum_{j=0}^{m} a_j b_k \right)$

---

**Beweis**: Ausgelassen (Induktion)

---

7.6 + 7.8 gelten allgemeiner für Verknüpfungen +assoziativ welche kommutativ und distributiv sind.

$\boxed{\text{Aber Vorsicht: Alles ist endlich!}}$

**Beispiel 7.9** Sei $\circledast$ wie in Beispiel 7.5 und sei $e$ eine Einheit für $\circledast$ $\boxed{\text{(Denke: } \circledast =\cdot \quad e=1\text{)}}$

Für $a \in X$ definiere rekursive die n-te Potenz

$$a^0 = e \quad \text{und} \quad a^{n+1} = a^n \circledast a$$

Start Rekursion

Dann kann man folgende $\boxed{\text{Rechenregeln}}$ zeigen:

$$a^1 = a \;,\; e^n = e \;;\; a^n \circledast a^m = a^{n+m} \;,\; (a^n)^m = a^{nm}$$

Für $a, b \in X$ mit $a \circledast b = b \circledast a$ folgt sogar

$$(a \circledast b)^n = a^n \circledast b^n$$

---

**Beispiel 7.10** Sei $+$ wie in Beispiel 7.6. und $a \in \mathbb{N}_0$.

Dann kann man rekursiv

Rekursion

Start

$$0 \cdot a = 0 \quad \text{und} \quad (n+1) \cdot a = (n \cdot a) + a$$

definiere, genannt n-fache von a.

Es gilt dann:

$$n \cdot 0 = 0 \;,\; n \cdot a + m \cdot a = (n+m) \cdot a$$

$$m \cdot (n \cdot a) = (mn) \cdot a$$

$$n \cdot a + n \cdot \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{N}_0}}{b} = n \cdot (a+b) \qquad \boxed{\text{Rechenregeln}}$$