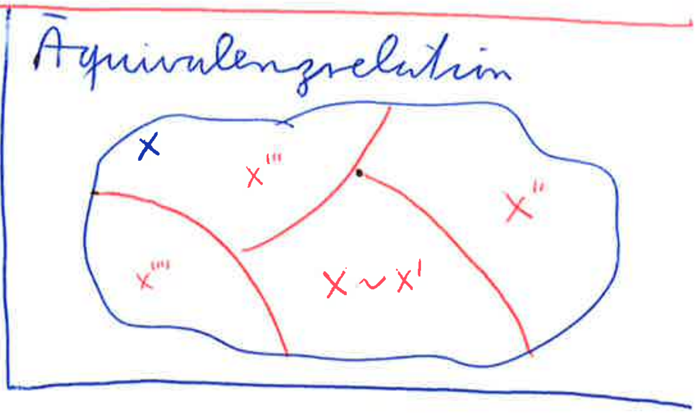
Vorlesung 4, 15. Okt. 2018

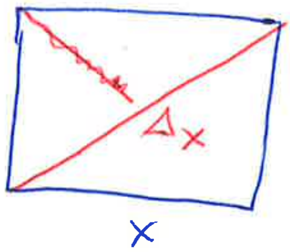
"Naive Mengenlehre III"



Relationen setzen Elemente einer Menge in Verbindung.

Eine (binäre) Relation R auf X ist eine Teilmenge $R \subset X \times X$. Für $(x,y) \in R$ schreibt man $x R y$ oder $x \sim_R y$ oder ...

Die Diagonale $\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ bestimmt die reflexiven Relationen R.



Eine Relation R heißt

- reflexiv, falls $\Delta_X \subset R$, also xRx
- transitiv, falls $(xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow (xRz)$
- symmetrisch, falls $(xRy) \Rightarrow (yRx)$
- äquivalent, falls R reflexiv, transitiv und symmetrisch ist

Beispiel 4.1 a) $X = \{1,2,3\}$ $R = \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$ geschrieben $<$. Denn $1<2$ und $2<3 \Rightarrow 1<3$, also ist $<$ transitiv. Aber $<$ ist weder reflexiv noch symmetrisch.

b) Wie in a) nur mit $\leq$ $\rightsquigarrow$ transitiv + reflexiv.

c) $R = \Delta_X$ heißt Identitätsrelation, denn $(xRx') \Leftrightarrow (x = x')$. Diese ist eine Äquivalenzrelation.

d) X = Menschenmenge, R = Gleiche Hutgröße
R ist Äquivalenzrelation.

~~Theorem~~ Eine (disjunkte) Zerlegung von X ist eine Teilmenge $\mathfrak{Z} \subset P(X) \setminus \{\emptyset\}$ so, dass

$$\forall x \in X \quad \exists!\, Z \in \mathfrak{Z} \text{ mit } x \in Z$$

oder $\bigcup_{Z \in \mathfrak{Z}} Z = X$ und $Z \cap Z' = \emptyset$ für $Z, Z' \in \mathfrak{Z}$

Theorem 4.2 Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann induziert $\sim$ eine Zerlegung von X. (Die Teilmengen der Zerlegung nennt man Äquivalenzklasse und schreibt $[x]$.)

Beweis: Für $x \in X$ sei $[x] = \{x' \in X \mid x' \sim x\} \subset X$

Wegen $x \sim x$ ist $[x] \neq \emptyset$ und jedes $x \in X$ ist in einer solchen Klasse, nämlich $x \in [x]$.

Sei $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ und sei $z \in [x] \cap [y]$. Dann folgt $z \sim x$ und $z \sim y \overset{\text{Symmetrie}}{\Longrightarrow} (x \sim z) \wedge (z \sim y) \overset{\text{Transitiv}}{\Longrightarrow} (x \sim y)$ Analog $y \sim x$. Deswegen folgt $[x] = [y]$, denn $\forall a \in [x]$ gilt $(a \sim x) \wedge (x \sim y) \Rightarrow (a \sim y)$, also $a \in [y]$ und umgekehrt.

Die Restklassenmenge

$$X/\sim \; = \{[x] \mid x \in X\} \subset P(X)$$

in der Zerlegung von X in Theorem 4.2 definiert eine Surjektion

$$p_x : X \longrightarrow X/\sim \; , \quad x \longmapsto [x]$$

welche als Projektion bezeichnet wird.

Beispiel 4.3 Wie in Beispiel 4.1 d), dann ist $[x]$ = Menge der Menschen mit Hutgröße k, falls x Hutgröße k hat.
Jeder Mensch mit Hutgröße k ist ein Repräsentant der Menge $[x]$ und $X/\sim$ teilt die Menschen in Hutgrößenklassen. (wird allgemein verwendet)

Eine Relation R heißt

- antisymmetrisch $(xRy) \wedge (yRx) \Rightarrow x = y$
- total, falls $(xRy) \vee (yRx)$

Eine Relation $R = \leq$ heißt Ordnung auf X, falls $\leq$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.
$\leq$ heißt totale Ordnung, falls sie zusätzlich total ist.
$(X, \leq)$ heißt (total) geordnete Menge.

Beispiel 4.4 a) Wie in 4.1 b) $\leq$ auf $\{1, 2, 3\}$ ist totale Ordnung.
b) X = Menschen, $\leq$: Hat kleinere Hutgröße ist eine totale Ordnung c) Siehe [AE06, Beispiele 4.4]

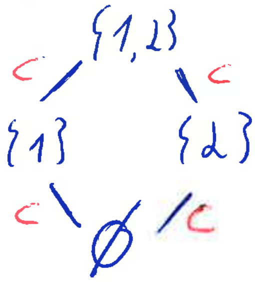
Man schreibt auch

$$x \geq y \text{ für } y \leq x\,; \quad x < y \text{ für } (x \leq y) \wedge x \neq y\,; \quad x > y \text{ für } y < x$$

Proposition 4.5 $(X, \leq)$ total geordnet. Dann gilt für alle $x, y \in X$:
$(x < y) \vee (x = y) \vee (x > y)$ und nicht gleichzeitig.

Beweis: Wegen Totalität gilt mind. eins davon, wegen Antisymmetrie nicht zwei.

Beispiel 4.6 Proposition 4.5 gilt nur für total geordnete Mengen. Zum Beispiel ist $(P(X), \subset)$ eine geordnete Menge (genannt natürliche Ordnung auf $P(X)$) aber für $X = \{1,2\} \Rightarrow P(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ und

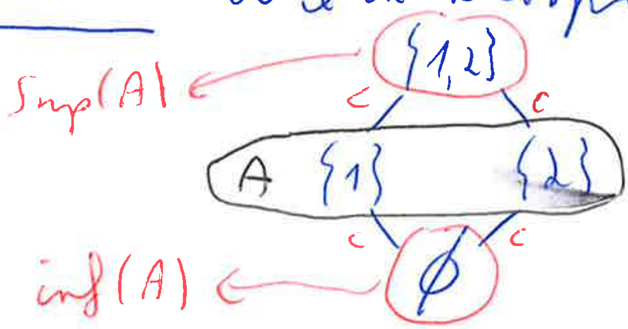


also nicht total und $\{1\}, \{2\}$ stehen in keiner Relation.

Sei $(X, \leq)$ geordnet und $A \subset X$, $A \neq \emptyset$. Dann heißt A

- nach oben beschränkt, wenn $\exists t \in X$ mit $t \geq a \;\forall a \in A$ $(*)$
- nach unten beschränkt, wenn $\exists b \in X$ mit $b \leq a \;\forall a \in A$ $(\square)$
- beschränkt, wenn A nach oben und unten beschränkt ist
- ein t wie in $(*)$ heißt obere Schranke von A
- ein b wie in $(\square)$ heißt untere Schranke von A
- t wie in $(*)$ heißt Maximum von A, falls $t \in A$
- b wie in $(\square)$ heißt Minimum von A, falls $b \in A$
- $\sup(A) = \min\{t \in X \mid t \text{ ist obere Schranke}\}$
  Supremum ↳ ein Minimum dieser Menge
- $\inf(A) = \max\{b \in X \mid b \text{ ist untere Schranke}\}$
  Infimum ↳ ein Maximum dieser Menge

Beispiel 4.7 Wie in Beispiel 4.6



A ist beschränkt

$\min(A) = 1$ oder 2

$\max(A) = 1$ oder 2

Weitere Beispiele siehe [AE06, Bemerkung 4.5, Beispiel 4.6]

$(X, \underset{\le}{\overset{\shortparallel}{\le_X}})$, $(Y, \underset{\le}{\overset{\shortparallel}{\le_Y}})$ geordnet und $f: X \longrightarrow Y$ Abbildung

- f heißt wachsend, falls $(x \le y) \Rightarrow (f(x) \le f(y))$
- f heißt fallend, falls $(x \le y) \Rightarrow (f(x) \ge f(y))$
- strikt wachsend, falls $(x < y) \Rightarrow (f(x) < f(y))$
- strikt fallend, falls $(x < y) \Rightarrow (f(x) > f(y))$
- beschränkt (nach oben/unten), falls $\mathrm{im}(f)$ beschränkt (nach oben/unten)
- beschränkt auf beschränkten Teilmengen, falls $f(A)$ beschränkt ist für $A \subset X$ beschränkt

Beispiele siehe [AE06, Beispiele 4.7]

Eine Verknüpfung $\circledast: X \times X \longrightarrow X$ ist eine Abbildung. Man schreibt $x \circledast y$ für $\circledast(x, y)$. Für $A, B \underset{\ne \emptyset}{\subset} X$

$$A \circledast B = \{ a \circledast b \mid a \in A, b \in B \}$$

$$A \circledast b = A \circledast \{b\} \quad ; \quad a \circledast B = \{a\} \circledast B$$

$A \subset X$, $A \ne \emptyset$ heißt abgeschlossen bzgl. $\circledast$, falls $A \circledast A \subset A$ gilt.

Beispiel 4.8 a) $\circ: \mathrm{Abb}(X, X) \times \mathrm{Abb}(X,X) \longrightarrow \mathrm{Abb}(X,X)$

$$g \;,\; f \longmapsto g \circ f$$

ist eine Verknüpfung.

b) Addition, Multiplikation etc. sind Verknüpfungen. ("Blaupausenbeispiele")

c) $$\cup : P(X) \times P(X) \longrightarrow P(X)$$
$$A \,,\, B \longmapsto A \cup B$$

$$\cap : P(X) \times P(X) \longrightarrow P(X)$$
$$A \,,\, B \longmapsto A \cap B$$

sind Verknüpfungen

Eine Verknüpfung $\circledast$ heißt

- assoziativ, falls $(a \circledast b) \circledast c = a \circledast (b \circledast c)$ $\forall a,b,c \in X$
- kommutativ, falls $(a \circledast b) = (b \circledast a)$

Beispiel 4.9 Alle Verknüpfungen aus 4.8 sind assoziativ, aber $\circ$ ist im Allgemeinen nicht kommutativ.

$e \in X$ heißt Einheit oder neutrales Element, falls

$$e \circledast x = x = x \circledast e \quad \forall x \in X$$

bzgl. $(*)$

Beispiel 4.10 Wie in Beispiel 4.8

a) Die Einheit ist id_X.

b) Die Einheit bzgl $+$ ist 0, die bzgl. $\cdot$ ist die 1

c) $\emptyset$ ist Einheit bzgl. $\cup$, X ist Einheit bzgl. $\cap$

Proposition 4.11 Es gibt nur eine Einheit bzgl. $\circledast$.

Beweis: Seien $e, e' \in X$ Einheiten. Dann

$$e = e \circledast e' = e'$$

$\boxed{3}$

Beispiel 4.12 Zurück zu Beispiel 4.6.

Nehme $* = \cup$

Diese ist symmetrisch also kommutativ.

$$P(\{1,2\}) = \begin{tikzcd}[column sep=small] & \{1,2\} & \\ \{1\} \arrow[ur, phantom, "\subset"] & & \{2\} \arrow[ul, phantom, "\subset"] \\ & \emptyset \arrow[ul, phantom, "\subset"] \arrow[ur, phantom, "\subset"] & \end{tikzcd}$$

$\emptyset \longrightarrow$ Einheit, denn

$\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \cup \{1\} = \{1\}$, $\emptyset \cup \{2\} = \{2\}$

$\emptyset \cup \{1,2\} = \{1,2\}$

$$A \subset P(\{1,2\}) = \begin{tikzcd}[column sep=small] & \{1,2\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \{1\} \arrow[dr, dash] & & \{2\} \arrow[dl, dash] \\ & \emptyset & \end{tikzcd}$$

A

A ist $\cup$-abgeschlossen:

~~...~~

$\{1\} \cup \{1\} = \{1\} \in A$

$\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\} \in A$

$\{2\} \cup \{1\} = \{1,2\} \in A$

usw.

„Multiplikationstabelle":

$* \cup \square$

Symmetrisch = kommutativ

$\cup$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1,2\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$

A