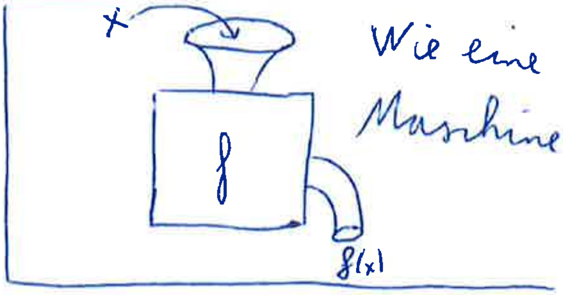
Vorlesung 3, 08. Okt. 2018

"Naive Mengenlehre II"

Wichtiger als Mengen selbst ist, wie diese in Verbindung/Relation stehen. Dies wird durch den Begriff der Abbildung/Funktion geklärt: Eine Abbildung $f: X \to Y,\ x \mapsto f(x)$ ist eine Vorschrift, welche jedem $x \in X$ genau ein $f(x) \in Y$ zuordnet. $f(x)$ heißt Wert, X Definitionsbereich/source und Y Wertebereich/target. Die Menge



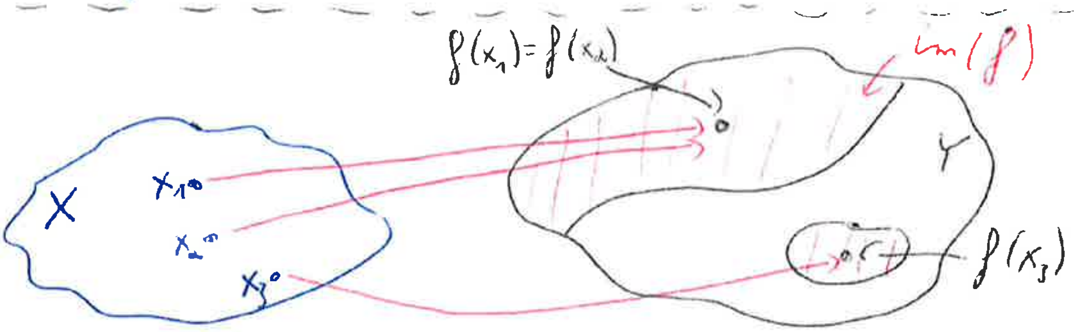
$$\mathrm{im}(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ mit } f(x) = y\}$$

heißt Bild und die Menge

$$G(f) = \mathrm{graph}(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X\}$$

heißt Graph von f.

Beispiel 3.1



Bemerkung 3.2 Formal sollte man Funktionen auch als Mengen definieren, vgl. [AE06, Bemerkung 3.1]

Beispiel 3.3 X = Menge aller Hüte, Y = Menge der Menschen

$f: X \to Y$, Hut $\mapsto$ Besitzer

Zwei Abbildungen $f: X \to Y$ $g: X' \to Y'$ heißen gleich, falls

$$X = X', \quad Y = Y' \quad \text{und} \quad f(x) = g(x) \;\; \forall x \in X$$

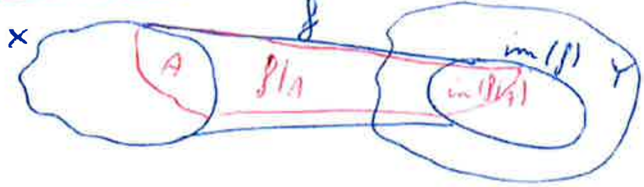
Beispiele 3.4

a) Die leere Abbildung $f: \emptyset \to Y$. Achtung $\emptyset$ kann nie die Zielmenge sein, falls der Definitionsbereich leer ist.

b) Die Identität $id_X : X \to X$; $x \mapsto x$

c) Inklusion: Ist $X \subset Y$, dann $i: X \to Y$, $x \mapsto x$

d) Einschränkung: $f: X \to Y$ und $A \subset X$, dann $f|_A : A \to Y$, $a \mapsto f(a)$



e) Weitere Beispiele [AE06, Beispiele 3.2]

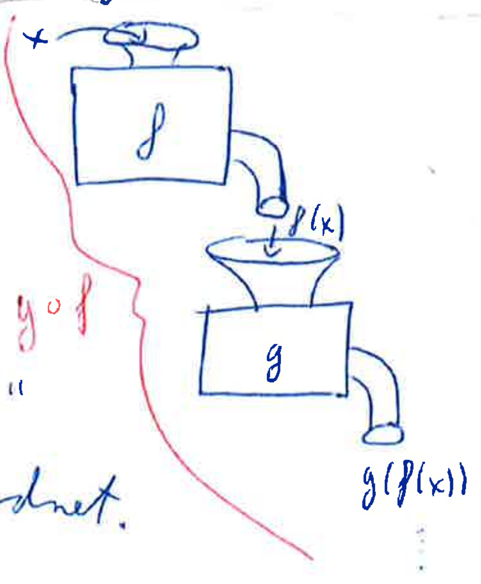
Seien $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ Abbildungen. Dann ist die Komposition $g \circ f$ die Abbildung

$$g \circ f : X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x))$$

Beispiel 3.5 Wie in Beispiel 3.3

und sei $g: X \to Z$ (Menge der Städte), $g \mapsto$ Wohnort

Dann ist $g \circ f$ die Abbildung welche jedem Hut seinen "Wohnort" oder seinen "Aufenthaltsort" zuordnet.



Proposition 3.6

Es seien $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to A$ Abbildungen. Dann gilt $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

(Assoziativität, Wir lasse also Klammern weg)

Beweis: Ausgelassen.

Schreibweise $f: X \to Y \rightsquigarrow X \xrightarrow{f} Y$. Dann heißt ein Diagramm kommutativ, falls

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g'"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ Z' \arrow[r, "f'"'] & Z \end{tikzcd}$$

$h = g \circ f$ $\qquad$ $f' \circ g' = g \circ f$ $\qquad$ rot = schwarz

Analog für kompliziertere Diagramme. Dabei ist wie folgt zu lesen:

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[rr, bend right, dashed, "f_2 \circ f_1"'] & X_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[rrr, bend right=40, dashed, "f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_3 \circ f_2"'] & X_3 \arrow[r, "f_3"] & \dots \arrow[r, "f_n"] & X_{n+1} \end{tikzcd}$$

Beispiel 3.7

Die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y & \\ Z \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "h"'] & A \arrow[ul, "j"] \arrow[u, "g"] & B \arrow[ul, "l"'] \arrow[l, "k"] \end{tikzcd}$$

bedeutet:

$g = f \circ j$, $\ell = g \circ k$

$i = g \circ h$, $\ell = \underbrace{f \circ j}_{g} \circ k$

Man braucht $\ell = g \circ k$ nicht

Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt

Injektiv, falls $(f(x) = f(x')) \Rightarrow x = x'$

Surjektiv, falls $\mathrm{im}(f) = Y$

Bijektiv, falls injektiv und surjektiv

Man spricht auch von Injektion, Surjektion, Bijektion

Beispiel 3.8

a) Wie in Beispiel 3.3 f ist nicht injektiv, da ein Mensch mehrere Hüte haben kann und f ist nicht surjektiv, da es Menschen gibt, die keinen Hut besitzen.

b) Die Identität ist bijektiv.

c) Siehe [AE06, Beispiele 3.4]

Beispiel 3.9 $X = \{1,2,3\}$ $Y = \{4,5,6\}$ $f: \begin{array}{l} 1 \mapsto 4 \\ 2 \mapsto 5 \\ 3 \mapsto 6 \end{array}$ ist eine Bijektion. "Bijektion $\hat{=}$ X und Y sind effektiv gleich".

Proposition 3.10 Eine Abbildung $f: X \to Y$ ist genau dann bijektiv, wenn $\exists\, g: Y \to X$ so, dass $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$ gilt. In diesem Fall ist g eindeutig.

Beweis: „$\Rightarrow$" Ist f bijektiv, dann $\exists\, y \in Y \; \exists!\, x \in X$ mit $y = f(x)$. Definiere also $g(y) = x$. Tippfehler: Für alle

„$\Leftarrow$" Aus $f \circ g = id_Y$ folgt, dass f surjektiv ist.

Seien also $x, x' \in X$ mit $f(x) = f(x')$. Dann gilt aber $x = id_X(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = id_X(x') = x'$. Also ist f injektiv.

Sei $h : Y \to X$ eine weitere Abbildung mit $h \circ f = id_X$ und $f \circ h = id_Y$. Dann

$$g = g \circ id_Y = g \circ \underbrace{f \circ h}_{id_Y} = \underbrace{g \circ f}_{id_X} \circ h = id_X \circ h = h \qquad \square$$

Die Funktion g aus Proposition 3.10 wird Umkehrabbildung genannt und f^{-1} geschrieben. (Auch Inverse genannt)

Proposition 3.11 Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ bijektiv. Dann ist $g \circ f : X \to Z$ bijektiv und

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Beweis: $g \circ f$ ist surjektiv, weil f und g surjektiv sind. Seien $x, x' \in X$ mit $\cancel{g \circ f}$ $g(f(x)) = g(f(x'))$ $\Rightarrow f(x) = f(x')$, da g injektiv ist $\Rightarrow x = x'$ da f injektiv ist. Es gilt weiter, dass

$$(f^{-1} \circ \underbrace{g^{-1}) \circ (g}_{id_Y} \circ f) = f^{-1} \circ id_Y \circ f = \underbrace{f^{-1} \circ f}_{id_X} = id_X$$

$\Rightarrow$ Behauptung, da Inverse eindeutig sind $\square$

Seien $f : X \to Y$, $A \subset X$, $C \subset Y$. Dann

$f(A) = \{ f(a) \in Y \mid a \in A \}$ Bild

$f^{-1}(C) = \{ x \in X \mid f(x) \in C \}$ Urbild

Sei $f: X \to Y$ eine Abbildung und sei $P(X)$ die Potenzmenge von X und $P(Y)$ die von Y. Bezeichne mit

$$\mathrm{Abb}(X,Y) = Y^X = \{ f: X \to Y \mid f \text{ Abbildung} \}$$

die Menge aller Abbildungen von $X \to Y$.

<u>Beispiel 3.12</u> Ist $X = \{1,2\} = Y$, dann gilt es

$$f_1: \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 1 \end{array} \qquad f_2: \begin{array}{l} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \end{array} \qquad f_3: \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 1 \end{array} \qquad f_4: \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 2 \end{array}$$

und $Y^X = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ welche 2^2 Elemente hat.

Es gilt auch die folgenden Mengenabbildungen:

$$\tilde{f}: P(X) \to P(Y), \quad A \subset X \mapsto f(A)$$

$$\tilde{f}^{-1}: P(Y) \to P(X), \quad B \subset Y \mapsto f^{-1}(B)$$

Vorsicht: f^{-1} steht für das Urbild und die Inverse. Ersteres gilt es immer, zweiteres nur für f bijektiv

---

Man schreibt $\tilde{f}^{-1} = f^{-1}$ und z.B. $f^{-1}(y) = \tilde{f}^{-1}(\{y\})$
Man nennt $f^{-1}(y) \subset X$ die Faser von f an y.

<u>Beispiel 3.13</u>

Die Faser $f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$ kann leer sein. Zum Beispiel, zurück nach 3.3.: f^{-1}(Mensch) = Alle Hüte, die den Mensch besitzt.

Proposition 3.14

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann:

a) $A \subset B \subset X \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

b) $A_\alpha \subset X \ \forall \alpha \in I \Rightarrow f(\bigcup_\alpha A_\alpha) = \bigcup_\alpha f(A_\alpha)$

c) $A_\alpha \subset X \ \forall \alpha \in I \Rightarrow f(\bigcap_\alpha A_\alpha) \subset \bigcap_\alpha f(A_\alpha)$

d) $A \subset X \Rightarrow f(A^c) \supset f(X) \setminus f(A)$

e) $A' \subset B' \subset Y \Rightarrow f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$

f) $A'_\beta \subset Y \ \forall \beta \in J \Rightarrow f^{-1}(\bigcup_\beta A'_\beta) = \bigcup_\beta f^{-1}(A'_\beta)$

g) $A'_\beta \subset Y \ \forall \beta \in J \Rightarrow f^{-1}(\bigcap_\beta A'_\beta) = \bigcap_\beta f^{-1}(A'_\beta)$

i) $A' \subset Y \Rightarrow f^{-1}(A'^c) = f^{-1}(A')^c$

Beweis: Ausgelassen

Proposition 3.15

$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$.

Dann gilt $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1} \circ g^{-1}(B) \ \forall B \subset Z$

Beweis:

Vergleich von den Fasern:

$(g \circ f)^{-1}(z) = \{x \in X \mid g(f(x)) = z\}$

$g^{-1}(z) = \{y \in Y \mid g(y) = z\}$

$f^{-1}(g^{-1}(z)) = \{x \in X \mid f(x) = g^{-1}(z)\}$ $\{y \in Y \mid g(y) = z\}$

Gleichheit folgt, da $g(g^{-1}(z)) = z$