Vorlesung 2, 01. Okt. 2018

"Naive Mengenlehre I"

Disclaimer: Wir machen formale Mengenlehre später. Erstmal "naiv"

Die (mathematische) Mengenlehre befasst sich mit Kollektionen von Objekten. Diese Kollektionen werden Mengen $X, Y, \ldots$ genannt. Ein Objekt x kann in einer Menge sein, geschrieben $x \in X$, oder nicht, geschrieben $x \notin X$. Objekte werden Elemente genannt.

Beispiel 2.1 $X =$ Die Menge aller Menschen. Objekte sind Menschen.

Sind X, Y Mengen so ist

$$X \subset Y \iff \forall x \in X \mid x \in Y$$

X ist Teilmenge von Y

Schreibe $Y \supset X$ für $X \subset Y$ und wir nennen Y eine Obermenge von X.

Ist X eine Menge dann ist $\{x \in X \mid E(x)\}$ die Teilmenge von X für die $E(x)$ wahr ist.

Die Menge $\emptyset_X = \{x \in X \mid x \neq x\}$ heißt leere Menge.

Mengen heißen gleich, geschrieben $X = Y$, wenn

$$X = Y \iff (X \subset Y) \land (Y \subset X)$$

Wir schreiben auch $X \subsetneq Y$ für $(X \subset Y) \wedge (X \neq Y)$ etc.

<u>Beispiel 2.2</u> X = Menge der Menschen, Y = Die Menge aller Lebewesen. Dann ist $X \subsetneq Y$

<u>Proposition 2.3</u> Seien X, Y, Z Mengen

a) Es gilt $X \subset X$ (Reflexivität)

b) Es gilt $(X \subset Y) \wedge (Y \subset Z) \Rightarrow (X \subset Z)$ (Transitivität)

c) Sei $E(x)$ eine Eigenschaft. Dann ist

$$x \in \emptyset_X \Rightarrow E(x)$$

wahr. ("Die leere Menge hat jede Eigenschaft".)

d) Es gilt $\emptyset_X = \emptyset_Y$ ("Es gibt nur eine leere Menge" und wir schreiben $\emptyset$.)

<u>Beweis</u> a+b) Ausgelassen.

c) Es gilt $(x \in \emptyset_X \Rightarrow E(x)) = \overbrace{\neg(x \in \emptyset_X) \vee E(x)}^{(*)}$

Aber $\neg(x \in \emptyset_X)$ ist für alle $x \in X$ wahr, also ist $(*)$ immer wahr.

d) Setze $E(x) =$ "$x \in \emptyset_Y$", dann folgt aus c), dass $\emptyset_X \subset \emptyset_Y$. Vertauschung von $X \leftrightarrow Y$ gibt die andere Richtung. $\boxtimes$

Wir schreiben auch $\{x, y, \ldots\}$ für die Menge, welche $x, y, \ldots$ enthält

---

<u>Beispiel 2.4</u>: Die Menge $\{x\}$ besteht nur aus einem Element. Ist $x \neq y$, dann ist $\{x\} \neq \{y\}$

Sei X eine Menge, dann ist

$$\mathcal{P}(X) = \{ A \cancel{\subset X} \mid A \subset X \}$$

die Potenzmenge von X. ("Die Menge aller Teilmengen.")

Beispiel 2.5 $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$\mathcal{P}(\{x,y\}) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x,y\}\}$.

Seien $A, B \subset X$. Dann ist

$$A \cap B = \{ x \in X \mid (x \in A) \wedge (x \in B) \}$$

der Durchschnitt von A und B. Falls $A \cap B = \emptyset$, so heiße A und B disjunkt. Weiter

$$A \setminus B = \{ x \in X \mid (x \in A) \wedge (x \notin B) \}$$

heißt das Komplement (von B in A).

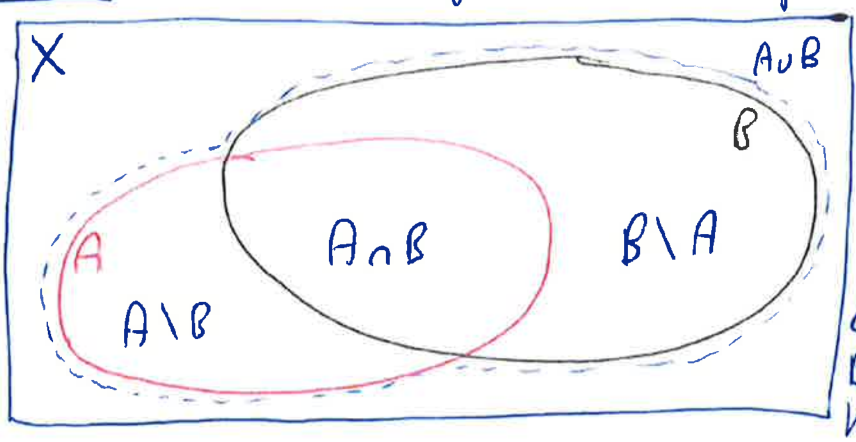
Die Menge

$$A \cup B = \{ x \in X \mid (x \in A) \vee (x \in B) \}$$

heißt Vereinigung.

Achtung: Häufig lässt man die Obermenge X weg und schreibt nur $A^c = X \setminus A$.

Beispiel 2.6 (Venn Diagramme – nur zur Veranschaulichung!)



X = Menschen
A = Brillenträger
B = Kontaktlinsenträger
dann z.B.
$B \setminus A$ Menschen, welche Kontaktlinse benutzen

Proposition 2.7 Seien X, Y, Z Mengen. Dann gilt:

a) $X \cup Y = Y \cup X$, $X \cap Y = Y \cap X$ (Kommutativität)

b) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (\cancel{X} \cup Z)$, $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$

(Assoziativität ⇝ Wir lassen Klammern weg)

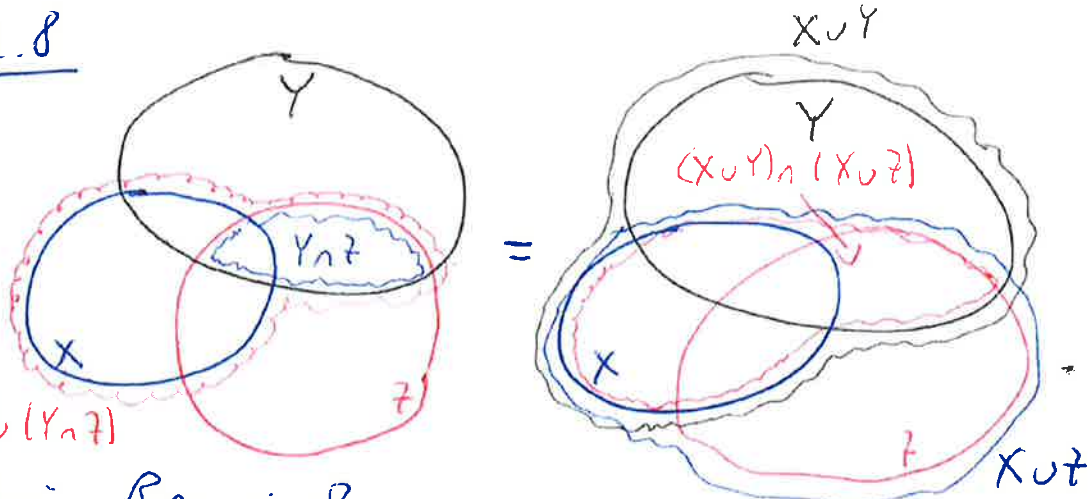
c) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup \cancel{Y}) \cap (X \cup Z)$

$X \cap (\cancel{X} \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ (Distributivität)

d) $X \subset Y \iff X \cup Y = \cancel{X} Y \iff X \cap Y = X$

Beweis: Ausgelassen.

Beispiel 2.8



Das ist kein Beweis!

Seien X und Y Mengen. Dann ist

$$X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

"geordnete Paare" ↼ $(x,y) = (x',y') \iff (x = x') \wedge (y = y')$

das Produkt.

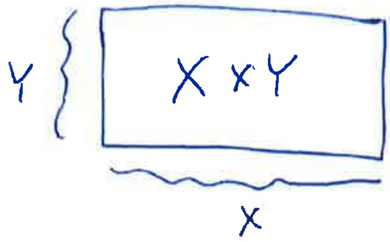
Analog, seien $X_1, \dots, X_n$ Mengen, dann ist

$$\bigtimes_{i=1}^{n} X_i = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\}$$

Beispiel 2.9 Für $X = \{a,b\}$ und $Y = \{c,d,e\}$ ist

$$X \times Y = \{(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e)\}$$

Bildchen:



Proposition 2.10 Seien X, Y Mengen.

a) $X \times Y = \emptyset \iff (X = \emptyset) \vee (Y = \emptyset)$

b) $(X \times Y = Y \times X) \iff X = Y$ für $X, Y \neq \emptyset$

Beweis: b) Ausgelassen.

a) „$\Rightarrow$" Angenommen $X \times Y = \emptyset$, aber weder $X = \emptyset$ noch $Y = \emptyset$. Dann gibt es $x \in X$ und $y \in Y$. Dann ist aber $(x,y) \in X \times Y$. Widerspruch.

„$\Leftarrow$" Sei $X \times Y \neq \emptyset$ und wähle $(x,y) \in X \times Y$. Dann ist $x \in X$ und $y \in Y$, also $\neg((X = \emptyset) \vee (Y = \emptyset))$.

Sei $I \cancel{A} \neq \emptyset$. Weiter sei für $\alpha \in \cancel{A} I$ eine Menge A_α gegeben. Dann heißt die Menge

$$\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$$

Familie oder Mengensystem, und I heißt Indexmenge.

Vorsicht: Man verlangt nicht, dass $A_\alpha = A_\beta \iff \alpha = \beta$

Analog zu Produkte: $A_1 \cup \ldots \cup A_n = \{x \mid (x \in A_1) \vee \ldots \vee (x \in A_n)\}$ und $A_1 \cap \ldots \cap A_n = \{x \mid (x \in A_1) \wedge \ldots \wedge (x \in A_n)$

Das wollen wir verallgemeinern.

Es sei X eine Menge und $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ eine Familie von Teilmengen. Dann:

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \in X \mid \forall \alpha \in I \text{ gilt } x \in A_\alpha\} \subset X \quad \text{Durchschnitt}$$

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x \in X \mid \cancel{\forall} \exists \alpha \in I \text{ mit } x \in A_\alpha\} \subset X \quad \text{Vereinigung}$$

Proposition 2.11. Es seien $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ und $\{B_\beta \mid \beta \in J\}$ Familien von Teilmengen von X

a) $$\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right) \cap \left(\bigcap_\beta B_\beta\right) = \bigcap_{(\alpha,\beta) \in I \times J} A_\alpha \cap B_\beta$$

$$\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) \cup \left(\bigcup_\beta B_\beta\right) = \bigcup_{(\alpha,\beta)} A_\alpha \cup B_\beta \quad \text{(Assoziativität)}$$

b) $$\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right) \cup \left(\bigcap_\beta B_\beta\right) = \bigcap_{(\alpha,\beta)} A_\alpha \cup B_\beta \quad \text{(Distributivität)}$$

$$\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) \cap \left(\bigcup_\beta B_\beta\right) = \bigcup_{(\alpha,\beta)} A_\alpha \cap B_\beta$$

Beweis: Ausgelassen

Theorem 2.12 (Regeln von De Morgan)

Es ~~seien~~ sei $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ eine ~~Menge~~ Familie von Teil-Menge von X. Dann gilt

$$\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right)^c = \bigcup_\alpha A_\alpha^c$$

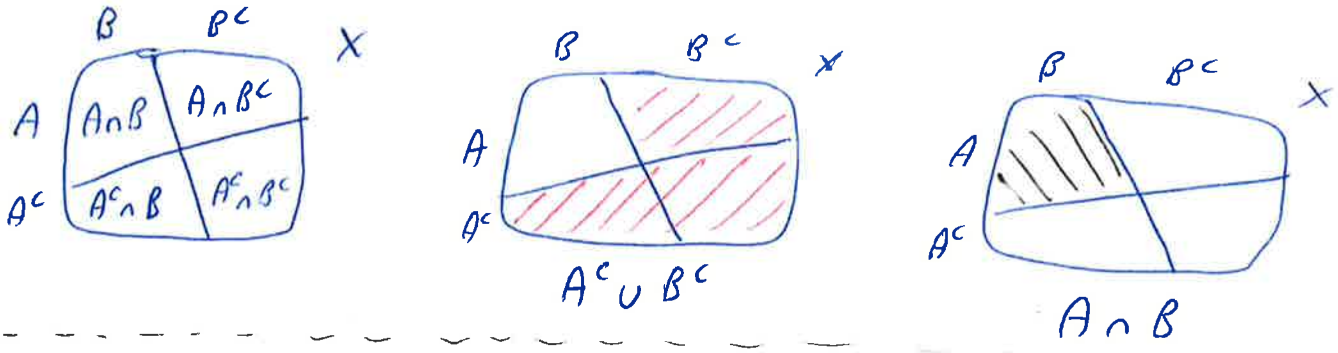
$$\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)^c = \bigcap_\alpha A_\alpha^c$$

Beispiel 2.13

"Wenn Milch oder Zucker enthalten ist, dann trinke ich den Kaffee nicht"

$\Leftrightarrow$

"Wenn ich den Kaffee trinke, dann ist weder Milch noch Zucker enthalten"



Beweis: Sei $x \in (\bigcap_\alpha A_\alpha)^c, x \in X \Rightarrow \exists \beta$ so, dass $x \notin A_\beta$ gilt. Dann folgt, dass $x \in X \setminus A_\beta = A_\beta^c \Rightarrow$ $x \in \bigcup_\alpha A_\alpha^c$. Also $(\bigcap_\alpha A_\alpha)^c \subset \bigcup_\alpha A_\alpha^c$

Sei $x \in \bigcup_\alpha A_\alpha^c, x \in X \Rightarrow \exists \beta$ so, dass $x \in A_\beta^c$. Dann gilt aber $x \notin A_\beta \Rightarrow x \notin \bigcap_\alpha A_\alpha$. Da aber $x \in X \Rightarrow x \in (\bigcap_\alpha A_\alpha)^c$. Also $(\bigcap_\alpha A_\alpha)^c \supset \bigcup_\alpha A_\alpha^c$.

$\Rightarrow$ Gleichheit.

Die Aussage, dass $(\bigcup_\alpha A_\alpha)^c = \bigcap_\alpha A_\alpha^c$ folgt durch analoge Überlegungen. $\boxtimes$