Vorlesung 13, 17. Dec. 2018

$\boxed{\text{„Nicht ganz so naive Mengenlehre"}}$

Warum das Ganze? Betrachte das folgende Axiom:

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{LvZ} \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \mathrm{AOC} \arrow[ur, Rightarrow] & & \mathrm{WOT} \arrow[ll, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Axiom (Problematisch)

Sei E eine Eigenschaft. Dann gibt es eine Menge $X = \{x \mid E(x)\}$

„Beweis warum Problematisch" (Russell)

Betrachte die Menge $R = \{X \mid X \notin X\}$.

Ist $R \in R$ oder $R \notin R$?

$\hookrightarrow R \in R \Rightarrow R \notin R$ $\qquad$ $\hookrightarrow R \notin R \Rightarrow R \in R$

Also kann R keine Menge sein?

Das ist das Lügnerparadoxon „Dieser Satz ist falsch" in Mengenschreibweise?

Um solche Sachen zu vermeiden baut man alles, was „Menge" ist, axiomatisch.

Dabei gilt das „Legoprinzip": Wenn man bereits Mengen hat, so kann man daraus neue Mengen bauen.

Axiome von Zermelo-Fraenkel

A.1 "Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente haben"

$$\forall A, B : (A = B \Leftrightarrow \forall C : (C \in A \Leftrightarrow C \in B))$$

A.2 "Es gilt Paarmengen $\{A, C\}$"

$$\forall A, C \boxed{\exists B} : \forall D : (D \in B \Leftrightarrow (D = A) \vee (D = C))$$

A.3 "Teilmengenschema"

$$\forall A : \boxed{\exists B} : \forall C : (C \in B \Leftrightarrow C \in A \wedge E(C))$$

A.4 "Es gilt Vereinigungen"

B enthält die Elemente der Elemente von A

$$\forall A : \boxed{\exists B} : \forall C : (C \in B \Leftrightarrow \exists D : (D \in A \wedge C \in D))$$

Schreibweise $B = \cup A$

A.5 "Es gilt Potenzmengen"

B enthält die Teilmengen von A

$$\forall A \boxed{\exists B} : \forall C : (C \in B \Leftrightarrow \forall D : (D \in C \Rightarrow D \in A))$$

A.6 "Es gilt eine (unendliche) Menge"

A.7 "Wenn man Elemente einer Menge gegen Mengen austauscht erhält man eine Menge"

$$\forall X, Y, Z : (E(X, Y) \wedge E(X, Z) \Rightarrow Y = Z)$$

$$\Rightarrow \forall A : \boxed{\exists B} : \forall C : (C \in B \Leftrightarrow \exists D : (D \in A \wedge E(D, C)))$$

B enthält für jedes Element von A eine Menge

A.8 "Jede nicht leere Menge A enthält ein Element B so, dass $A \cap B = \emptyset$"

$$\forall A : \left(A \neq \emptyset \Rightarrow \boxed{\exists B} : \left(B \in A \wedge \neg \exists C : (C \in A \wedge C \in B) \right) \right)$$

Beispiel 13.1

Alles setzt die Existenz von Menge voraus, außer A.6!

A.1 ⇝ sollte klar sein

A.2 ⇝ Sind A, B Mengen so ist $\{A, B\}$ eine Menge

A.3 ⇝ Ist A eine Menge so kann man Teilmengen von A auch als Menge betrachten.

A.4 → Ist z.B. $A = \{C, D\}$ so ist $B = \bigcup A$

$= C \cup D$

↳ Existiert wegen A.2

A.5 ⇝ Die Potenzmenge im üblichen Sinne.

Creatio ex nihilo

A.6 ⇝ Deus ex machina (A.6 + A.3 ⇝ leere Menge)

A.7 → Ist z.B. $A = \{1, 2\}$ dann ist auch

$B = \{C, D\}$ eine Menge durch $1 \longmapsto C$, $2 \longmapsto D$

A.8 → Verhindert unendliche Zykel wie

$A = \{x_1, x_2, \dots\}$ mit $x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni \dots$

Beispiel 13.2

Wo ist der Schnitt?

Wo ist das Komplement? Als Teilmengen, also via A.3

$X \cap Y = \{u \in X \mid u \in Y\}$ und $X \setminus Y = \{u \in X \mid u \notin Y\}$

Beispiel 13.3.

Die einelemtige Menge sind $\{a\} = \{a,a\}$.

Die Paare sind $(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\}$
$(a,b,c) = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$ etc. geordnet!

Beispiel 13.4 Wo sind Produktmenge?

Via $\boxed{\text{Potenzmengen}}$ A.5 und $\boxed{\text{Teilmengen}}$ A.3

$$X \times Y \subset P(P(X \cup Y))$$

$$(a,b) = \{\{a\}, \{a,b\}\} \in P(X \cup Y)$$

$\boxed{\text{Analog: Höhere Produkte}}$

"Theorem" (Zermelo - Fraenkel)

A So kann man alle mathematische Begriffe als Menge auffassen.

Axiom (Auswahlaxiom) "Liest sich eher wie ein Theorem"

A.9. ~~[illegible]~~ "Jede Familie von nicht leeren Teilmenge hat eine Auswahlfunktion"

$$\forall A : (((\emptyset \notin A) \wedge \forall X,Y,Z : ((X \in A \wedge Y \in A \wedge Z \in X \wedge Z \in Y) \Rightarrow (X = Y)))$$

$$\Rightarrow \boxed{\exists B} : \forall X : (X \in A \Rightarrow \exists! Y : (Y \in X \wedge Y \in B))$$

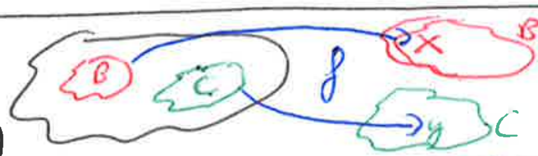
Sei A eine Menge nicht leerer Mengen. Dann $\exists f : A \to \bigcup A$, die jedem Element C von A ein Element $D \in C$ zuordnet.

Beispiel 13.4

Erstmal kann man Funktion als Menge auffassen. Ist $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung, so kann man sagen $f \subset X \times Y$ mit

$(x, f(x)) \subset X \times Y$

Beispiel 13.5

Bild: 

$x = f(B) \in B$
$y = f(C) \in C$

Das Auswahlaxiom postuliert die Existenz eine Abbildung auf S = Familie nicht leere Teilmengen so, dass $f(X) \in X$ für $X \in S$ gilt.

z. B.

i) $S = \{\{x\}, \{y\}, \{z\}, \dots\}$ In diesem Fall explizit konstruiert.

$\{x\} \xrightarrow{f} x$, $\{y\} \xrightarrow{f} y$, $\{z\} \xrightarrow{f} z$

ii) $S = \{1, \dots, n\}$ Existenz auch klar bei Induktion nach $|S|$.

iii) $S \subset \mathbb{R}$, S endlich. $f(X) = \inf(X)$ tut den Job.

$\boxed{\text{Aber: Im Allgemeine ist } f \text{ nicht konstruiert und wird axiomatisch vorausgesetzt.}}$

Eine Konsequenz des Auswahlaxioms ist:

Theorem 13.6 Jede Menge $\boxed{\text{besitzt}}$ eine Wohlordnung.

(Zur Erinnerung: Der Begriff "Wohlordnung" kam auf den Übungszetteln vor).

Beispiel 13.7

Diese Aussage ist hochgradig nicht trivial, außer in den Fällen, wo man es explizit machen kann:

i) Endliche Mengen

ii) $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

Nicht explizit: $\mathbb{R}$ kann wohlgeordnet werden.

In der Tat sind das Auswahlaxiom und Theorem 13.6 (Wohlordnungssatz) äquivalent.

Eine weitere ~~Äqui~~ äquivalente und häufig verwendete Version des Auswahlaxioms ist das Lemma von Zorn:

Theorem 13.8 (Lemma von Zorn)

Sei $(X, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Angenommen jede Kette $\tilde{X}$ hat eine obere Schranke.
Dann $\boxed{\text{besitzt}}$ X ein maximales Element.

Partielle Ordnung:
- reflexiv
- transitiv
- antisymmetrisch

Kette: Nicht leere Teilmenge, welche bzgl. $\leq$ total geordnet ist.

Obere Schranke: Muss nicht in der Kette liegen.

Folgerungen / Äquivalente Aussagen (*)

- Jeder Vektorraum besitzt eine Basis (*)
- Existenz algebraischer Abschlüsse von Körpern
- Hahn - Banach Theorem
- Tikhonov's Theorem (*)
- Maximale Ideale in Ringen (*)
- nicht meßbare Mengen
- Spannbaum Theorem (*)
- etc.