AUFGABEN 6: VORLESUNG GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

Aufgabe 1. Erläutern Sie ausführlich, wo der Fehler im folgenden Beweis steckt.

Behauptung: Seien $n \geq 1$ Menschen in einem Raum. Dann sind alle n Menschen gleich.

Beweis: Per Induktion. Der Induktionsanfang ist $n = 1$, welcher klarerweise erfüllt ist. (Jeder ist zu sich selbst gleich.) Sei die Aussage also wahr für n, und seien $n + 1$ Menschen in einem Raum. Schicken wir einen raus, so wissen wir per Induktion, dass alle verbleibenden n gleich sind. Nun holen wir den Mensch, der draußen stand, wieder rein und schicken einen anderen raus. Nun sind nach Induktionsvoraussetzung wieder alle gleich. Also müssen alle $n + 1$ Menschen gleich sein. $\square$?

Aufgabe 2. Es sei X eine Menge mit n Elementen. Zeigen Sie, dass die Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$ 2^n Elemente hat.

Aufgabe 3. Beweisen Sie folgende Aussagen per Induktion. Hierbei ist $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(b) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(c) Für $n \geq 2$ gilt $n + 1 < 2^n$.

(d) $n^3 - n$ ist durch drei teilbar.

(e) $n^k - n$ ist durch $k \in \mathbb{N}$ teilbar. (Errata: Achtung, diese Aufgabe war fehlerhaft. Sie gilt falls k eine Primzahl ist, aber z.B. für $k = 4$ kann man ein Gegenbeispiel finden.)

Aufgabe 4. Sei $p \in \mathbb{N}_0, p > 1$. Zeigen Sie, dass p genau dann eine Primzahl ist, wenn

$$(p|ab) \Rightarrow (p|a \vee p|b) \quad \forall a, b \in \mathbb{N}_0.$$

Abgabe: 05.Nov.2018 vor der Vorlesung. **Rückgabe**: 08.Nov.2018 in den Übungen.