AUFGABEN 4: VORLESUNG GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

Aufgabe 1. Sei $X = \{a, b, c\}$. Finden Sie alle möglichen Äquivalenzrelationen auf X.

Aufgabe 2. Sei X eine Menge. Bezeichne mit X^X die Menge der Abbildungen $X \to X$. Weiter bezeichne mit $S(X)$ die Menge der bijektiven Abbildungen $X \to X$. Zeigen Sie:

(a) Falls $f, g \in S(X)$, dann sind $g \circ f$ und $f \circ g$ auch in $S(X)$.

(b) Falls X mindestens zwei Elemente hat, dann ist X^X mit der Verknüpfung $\circ$ nicht kommutativ.

(c) Falls X mindestens drei Elemente hat, dann ist $S(X)$ mit der Verknüpfung $\circ$ nicht kommutativ.

Aufgabe 3. Seien X, Y Mengen, und seien $\sim_X, \sim_Y$ Äquivalenzrelationen auf diesen Mengen. Weiter sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung so, dass

$$(\star): \qquad (x_1 \sim_X x_2) \Rightarrow (f(x_1) \sim_Y f(x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Zeigen Sie, dass es dann genau eine Abbildung $[f]$ so gibt, dass

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_X"'] & Y \arrow[d, "p_Y"] \\ X/\sim_X \arrow[r, "{[f]}"'] & Y/\sim_Y \end{tikzcd}$$

kommutiert. Was passiert mit der Bedingung $(\star)$ im Fall dass $\sim_X$ die Identitätsrelation ist? (Das heisst $(x_1 \sim_X x_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2)$.)

Aufgabe 4. Es sei $(X, \leq)$ eine geordnete Menge. Seien A und B nach oben beschränkte Teilmengen von X. Beweisen Sie folgende Aussagen, falls die entsprechenden Suprema und Infima existieren:

(a) $\sup(A \cup B) = \sup(\sup(A), \sup(B))$.

(b) Falls $A \subset B$, dann ist $\sup(A) \leq \sup(B)$.

(c) Falls $A \cap B \neq \emptyset$, dann ist $\sup(A \cap B) \leq \inf(\sup(A), \sup(B))$.

Formulieren und beweisen Sie die entsprechenden Aussagen für nach unten beschränkte Teilmengen C und D von X.

Abgabe: 14.Okt.2019 vor der Vorlesung. **Rückgabe**: 17.Okt.2019 in den Übungen.