AUFGABEN 3: VORLESUNG GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

Aufgabe 1. Es seien X, Y, Z Mengen. Weiter seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Sind f und g injektiv so ist $g \circ f$ injektiv.

(b) Sind f und g surjektiv so ist $g \circ f$ surjektiv.

(c) f ist genau dann injektiv, wenn es ein $h\colon Y \to X$ so gibt, dass $h \circ f = \mathrm{id}_X$.

(d) f ist genau dann surjektiv, wenn es ein $h\colon Y \to X$ so gibt, dass $f \circ h = \mathrm{id}_Y$.

Hierbei sind id_X bzw. id_Y die Identität auf X bzw. auf Y.

Aufgabe 2. Es seien X, Y Mengen. Weiter sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und f^{-1} ihr Urbild. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist injektiv.

(ii) $f^{-1}(f(A)) = A$ für alle $A \subset X$.

(iii) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ für alle $A, B \subset X$.

(iv) Für alle $A, B \subset X$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

(v) Für alle $A, B \subset X$ mit $B \subset A$ gilt $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

Aufgabe 3. Es seien W, X, Y, Z Mengen. Weiter seien $f\colon W \to X$, $g\colon X \to Y$ und $h\colon Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen Sie, dass f, g, h bijektiv sind, falls $g \circ f$ und $h \circ g$ bijektiv sind.

Aufgabe 4. Seien X, Y Mengen und sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und f^{-1} ihr Urbild. Weiter bezeichne mit A, B Teilmengen von X und mit C, D Teilmengen von Y. Entscheiden Sie welche der folgenden Aussagen wahr sind.

(a) Falls $A \neq \emptyset$ gilt, dann ist $f(A) \neq \emptyset$.

(b) Falls $C \neq \emptyset$ gilt, dann ist $f^{-1}(C) \neq \emptyset$.

(c) Falls $A \subset B$ gilt, dann ist $f(A) \subset f(B)$.

(d) Falls $C \subset D$ gilt, dann ist $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$.

(e) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

(f) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

(g) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(h) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(i) Falls $B \subset A$ gilt, dann ist $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

(j) Falls $D \subset C$ gilt, dann ist $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Begründen Sie ihre Entscheidung mittels Beweis oder Gegenbeispiel.

Abgabe: 07.Okt.2019 vor der Vorlesung. **Rückgabe**: 10.Okt.2019 in den Übungen.