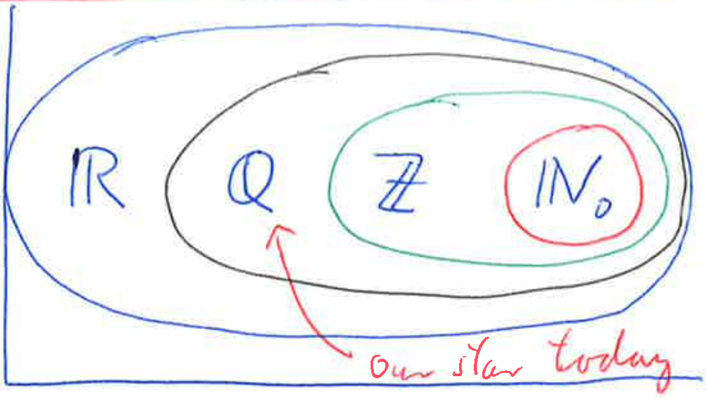
Vorlesung 10, 19. Nov. 2018

$\boxed{\text{„Die rationalen Zahlen II"}}$



Letztes Mal haben wir additive Inverse zu $\mathbb{N}_0$ hinzugefügt, damit wir subtrahieren können: Wir haben den Ring $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}_0$ ~~als~~ rein algebraisch aus $\mathbb{N}_0$ konstruiert. Aber wir können noch nicht teilen. Deswegen:

Ein Körper K ist ein $\boxed{\text{Ring}}$, so, dass

- $\boxed{0 \neq 1}$ gilt.
- Jedes Element $a \in K^\times = K - \{0\}$ $\boxed{\text{invertierbar bzgl. } \cdot}$ ist.

Beispiel 10.1 Jeder Körper hat wegen $0 \neq 1$ mindestens zwei Elemente. In der Tat gibt es einen Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen: Es ist $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$1+1=0$

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Man prüft nach, dass dies die Körperaxiome erfüllt.

Für $a \in K^\times$ schreibt man a^{-1} für das Inverse. Wie immer sind diese eindeutig

$$a'^{-1} = a'^{-1} \cdot a \cdot a^{-1} = a^{-1}.$$

Also gilt $(a^{-1})^{-1} = a$.

Lemma ($\boxed{\cdot\text{ Kürzen}}$) 10.2

Jeder Körper ist nullteilerfrei, d.h.

$$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$$

Beweis: Sei $ab = 0$ ~~und~~ wobei $a \neq 0$. Dann ist $b = a^{-1}\{ab\} = a^{-1} \cdot 0 = 0$ ☐

Es folgt also, dass $ax = b$ für alle $a \in K^\times$, $x, b \in K$ eine Lösung besitzt, nämlich $x = ba^{-1}$. Diese nennt man Quotienten und schreibt $\frac{b}{a}$.

Vorsicht: Null 0 besitzt kein Inverses. Also "darf nicht durch Null geteilt werden".

Lemma 10.3 (Rechenregeln)

Für $a, c \in K$, $b, d \in K^\times$ gilt:

a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$

b) $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$

$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd}$

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

d) $\frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$, falls $c \neq 0$.

Beweis: Ausgelassen.

Lemma 10.3 a) legt nahe einen Körper $K \supset \mathbb{Z}$ durch paare ganze Zahlen zu konstruieren. Dabei soll dieser Körper wieder minimal sein, mit der Eigenschaft, das $+, \cdot$ auf $\mathbb{Z}$ übertragen werden. Dieser Körper, welcher bis auf Ringisomorphismen = Körperisomorphismen, eindeutig ist wird mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

Man kann zeigen das $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ automatisch für einen Ringisomorphismus zwischen $K \to K'$ gilt.

Theorem 10.4 Es gibt einen kleinsten Körper $\mathbb{Q} \supset \boxed{\mathbb{Z}} \supset \boxed{\mathbb{N}_0}$, der auf $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}_0$ die ursprüngliche $+$ und $\cdot$ induziert. Dieser Körper ist bis auf Isomorphie eindeutig und wird Körper der rationalen Zahlen genannt.

Beweis (Skizze). Sei $\mathbb{Z}^\times = \mathbb{Z} - \{0\}$.

Schritt 1: Definiere auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\times$ eine Relation $\sim$ durch

$$(a,b) \sim (a',b') \iff ab' = a'b.$$

Dies ist eine Äquivalenzrelation, denn

Reflexiv: $(a,b) \sim (a,b)$, da $ab = ab$

Symmetrisch: $(a,b) \sim (a',b') \Rightarrow (a',b') \sim (a,b)$, da $ab = ba$

Transitiv: $\underbrace{(a,b) \sim (a',b')}_{ab' = a'b} \wedge \underbrace{(a',b') \sim (a'',b'')}_{a'b'' = a''b'} \Rightarrow \underbrace{(a,b) \sim (a'',b'')}_{ab'' = a''b}$, wegen Kürzen

$ab'b'' = a'bb'' = a''b'b$

Kürze

Schritt 2: Setze $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\times)/\sim$ und notiere

$$[(a,b)] = \frac{a}{b} \quad \text{und} \quad [(a,1)] = a.$$

Definiere:

$$[(a,b)] + [(a',b')] = [(ab' + a'b, bb')]$$

$$[(a,b)] \cdot [(a',b')] = [(aa', bb')]$$

Man überlege sich, dass das wohldefiniert ist.

$+_{\mathbb{Q}}$ ist kommutativ

$$[(a,b)] + [(a',b')] = [(ab' + a'b, bb')]$$
$$\shortparallel$$
$$[(a',b')] + [(a,b)] = [(a'b + ab', b'b)]$$

da $+_{\mathbb{Z}}, \cdot_{\mathbb{Z}}$ kommutativ sind.

Analog $+_{\mathbb{Q}}$ ist assoziativ, $\cdot_{\mathbb{Q}}$ ist assoziativ

$\cdot_{\mathbb{Q}}$ ist kommutativ und zusammen distributiv

Weiter ist $[(0,b)] = [(0,1)]$, da

$$(0,b) \sim (0,1) \text{ wegen } 0 \cdot 1 = 0 = 0 \cdot b$$

Also ist $[(0,1)] + [(a,b)] = [(a,b)]$ das Null-element.

Weiter ist $[(1,1)] \cdot [(a,b)] = [(a,b)]$, also ist $[(1,1)]$ das Einselement.

Schritt 3: Es gilt eine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$a \longmapsto [(a,1)] = a$$

welche injektiv ist und $\varphi(0) = 0_{\mathbb{Q}}$, $\varphi(1) = 1_{\mathbb{Q}}$
$\varphi(a+b) = \varphi(a) +_{\mathbb{Q}} \varphi(b)$ und $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot_{\mathbb{Q}} \varphi(b)$ erfüllt.

Man könnte sagen $\mathbb{Z}$ ist ein Unterring von $\mathbb{Q}$.

Schritt 4: Es gilt $a \cdot a^{-1} = 1$ für $a \in \mathbb{Q}^\times$, denn

$$[(a,1)] \cdot [(\underbrace{1,a}_{a^{-1}})] = [(a,a)] \text{, aber}$$

$$(a,a) \sim (1,1) \text{, denn } a \cdot 1 = 1 \cdot a$$

Also gibt es Inverse.

Zusammen: Schritte 1–4 zeigen, dass $\mathbb{Q}$ ein Körper ist, welcher $\mathbb{Z}$ enthält.

Schritt 5: Entfällt, da Körper immer Nullteilerfrei sind

Schritt 6: $\mathbb{Q}$ ist Minimal, da exakt die Inverse hinzugefügt werden "$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z}^\times)^{-1} \cup \underbrace{\{0\} \cup \mathbb{Z}^\times}_{\mathbb{Z}}$"

Schritt 7: Man baut auf wieder einen Ringisomorphismus zu anderen minimalen Konstruktionen

$\boxed{\mathbb{Z}}$

Proposition 10.5 $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar unendlich.

Beweis: Wegen $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ sind $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ unendlich. Sei $\varphi: \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$\varphi(n) = \begin{cases} n/2, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -(n+1)/2, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Dann ist φ ein Isomorphismus.

Behauptung: $r \in \mathbb{Q} \iff \exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit $r = p/q$. ~~und~~ Weiter kann q minimal gewählt werden.

Beweis: „$\Leftarrow$" Ist klar, da $\mathbb{Q}$ ~~so~~ durch $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\times$ konstruiert wurde.

„$\Rightarrow$" Setze

$$N = \{ n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{Z} \text{ mit } \tfrac{m}{n} = r \}$$

Da $N \subset \mathbb{N}_0$ ist besitzt N wegen dem Wohlordnungsprinzip ein Minimum $q = \mathrm{Min}(N)$.

Setze $p = r \cdot q$, dann ist $r = \frac{p}{q}$ mit $q \in \mathbb{N}$.

Beachte das q minimal ist, da $q = \mathrm{Min}(N)$

Diese Behauptung liefert eine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$$
$$r = \tfrac{p}{q} \longmapsto (p,q)$$

φ ist eine Bijektion auf eine Teilmenge von $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$:

- Die Darstellung $r = \frac{p}{q}$ ist eindeutig, da $q = \mathrm{Min}(N)$. Also ist φ injektiv.
- Die Teilmenge auf welche φ surjektiv geht ist $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ mit p, q teilerfremd.

$\Rightarrow$ Behauptung, da Teilmengen abzählbarer Mengen abzählbar sind