Vorlesung 1, 24. Sep. 2018

"Etwas Logik"

Disclaimer: Wir machen keine mathematische Logik, das führt zu weit. Eigentlich muss man alles erst formalisieren.

Die (mathematische) Logik dreht sich um Aussagen, d.h. Sätze denen man einen Wahrheitswert "w = wahr" oder "f = falsch" zuordnen kann. (Und zwar eindeutig.)

Beispiel 1.1. A = "Es regnet" ist eine Aussage.
A = "Dieser Satz ist falsch" ist keine Aussage

Idee: Man will nun aus elementaren Aussagen zusammengesetzte Aussagen mittels Aussagenjunktoren kreieren ("Legomethode"). Die Junktoren sind Negation $\neg$, Konjunktion $\wedge$ ("und") und Disjunktion $\vee$ (Tippfehler: "nicht entweder-oder" "entweder-oder", gesprochen "oder"). Diese sind durch Wahrheitstafeln definiert:

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
w	w	w	w
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	f

Eigenschaften E sind zusammengesetzte Ausdrücke, welche für Objekte x gelten können. Der Satz "x hat Eigenschaft E" wird dann als "$E(x)$ ist wahr" gelesen.

Gehört x zur Klasse X, dann schreiben wir $x \in X$; ansonsten $x \notin X$. Dann ist

$$\{x \in X \mid E(x)\}$$

die Klasse aller Objekte x, welche E erfüllen.

<u>Beispiel 1.2</u> X = Klasse aller Menschen, $x \hat{=}$ Mensch

$E(x)$ = "Mensch x ist kleiner als 1,8m". Dann ist

$\{x \in X \mid E(x)\} \hat{=}$ Alle Menschen kleiner als 1,8m

---

Um Schreibweise zu vereinfachen führt man auch noch Quantoren ein:

$\exists$ = "es gilt" $\quad \exists!$ = "es gilt genau ein" $\quad \forall$ = "für alle"

$\exists x \in X \mid E(x)$ $\quad \exists!\, x \in X \mid E(x)$ $\quad \forall x \in X \mid E(x)$

"Es existiert ein x mit $E(x)$" $\quad$ "Es gilt genau ein x mit $E(x)$" $\quad$ "Alle x erfüllen $E(x)$"

<u>Beispiel 1.3</u> Für X, x wie in Beispiel 1.2 ist $\exists x \in X \mid E(x)$ wahr, aber $\exists!\, x \in X \mid E(x)$ und $\forall x \in X \mid E(x)$ sind beide falsch.

Konvention 1.4

a) Wir lesen von links nach Rechts und z.B. "$\forall x \exists y \mid E(x,y)$" ist nicht dasselbe wie "$\exists y \forall x \mid E(x,y)$". Zur Deutlichkeit sollte werden Klammern gesetzt.

b) Negationen werden häufig durch das Streichen von Symbolen angedeutet, e.g. "$\notin$" bedeutet "nicht".

Beispiel 1.5

a) $\neg\neg A = \neg(\neg A) = A$

$\neg\neg A$	A
w	w
f	f

Wie in Beispiel 1.5 angedeutet sind zwei Aussagen (elementar oder zusammengesetzt) per Definition gleich, wenn sie dieselbe Wahrheitstafel haben.

Beispiel 1.6

a) $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A) \vee (\neg B)$
w	w	f	f
w	f	w	w
f	w	w	w
f	f	w	w

b) $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$

c) $\neg(\forall x \in X \mid E(x)) = \exists x \in X \mid E(x)$

d) Mehr Beispiele in 1.1. [AE06]

Implikationen sind zusammengesetzte Aussagen

$$(A \Rightarrow B) = (\neg A) \vee B$$

"aus A folgt B"

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

und eine Äquivalenz ist die Aussage

$$(A \Leftrightarrow B) = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

"A gilt genau dann wenn B gilt"

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Beispiel 1.7

A = "Es regnet", B = "Es stehen Wolken am Himmel"

dann ist $A \Rightarrow B$ wahr, aber $B \Rightarrow A$ nicht; also $A \not\Leftrightarrow B$.

Die Kontraposition

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

"A impliziert B" gilt genau dann, wenn "nicht B, nicht A impliziert"

Beispiel 1.8 Wie in Beispiel 1.7, es ist $\neg B \Rightarrow \neg A$ wahr "Wenn keine Wolken am Himmel stehen dann regnet es nicht", aber $\neg A \Rightarrow \neg B$ nicht, denn es kann auch bewölkt sein, ohne dass es regnet.

Konvention 1.9

Eine wahre Aussage wird als Proposition bezeichnet, wobei Theorem = "sehr wichtige Aussage" und Lemma = "Hilfsaussage" und Korollar = "direkte Folgerung" auch verwendet werden

---

Mathematik lebt von Beweisen, ~~d.h.~~ i.e. unter der Annahme "A = wahr" muss die Proposition "$A \Rightarrow B$" bewiesen werden, indem man zeigt, dass B wahr ist.

Dazu gibt es zwei Methoden:

- Direkter Beweis durch wiederholtes Anwenden von $(A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$
- Indirekter Beweis durch Anwenden von
$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Beispiel 1.10

a) Proposition: $1+1+1 = 3$

Beweis: Wir wissen bereits, dass $1+1=2$ und $2+1=3$ gelten (Annahme). Deswegen folgt

$$(1+1=2) \wedge (2+1=3) \Rightarrow (\underset{\substack{\parallel \\ 1+1}}{2}+1=3)$$

$\blacksquare$

8b) Proposition: $A =$ "Rabe" $B =$ "Schwarz"

(Also $A \Rightarrow B$ bedeutet "Alle Raben sind schwarz")

Beweis: Durch Beobachtung von grünen Objekten, keine davon war ein Rabe, bewiesen ∎

(Es gibt in diesem Fall nur zwei Farben "Schwarz" und "Grün". Aber Sie bemerken vielleicht, dass das ganze etwas absurd ist, aber Kontraposition in der Mathematik ist sehr nützlich.)

Zum Schluss sei nochmal betont, dass Sie Vorsicht walten lassen sollten, was Klammern angeht: x, y Menschen

$E(x,y) =$ "x und y sind Freunde"

Dann ist

$$\forall x \, (\exists y \mid E(x,y))$$

"Jeder Mensch hat einen Freund"

aber

$$\exists y \, (\forall x \mid E(x,y))$$

"Es gibt einen Mensch, welcher mit allen befreundet ist"