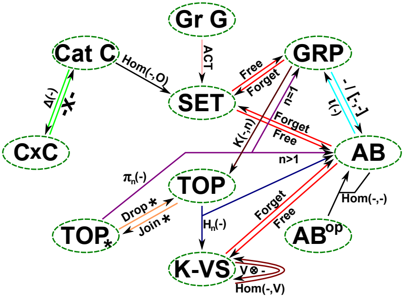
Warum Kategorientheorie?

Daniel Tubbenhauer - 02.04.2012

Georg-August-Universität Göttingen



Eine Verallgemeinerung bekannter Begriffe

	Geschlossen	Total	Assoziativ	Eins	Inverses
Gruppe	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja
Monoid	Ja	Ja	Ja	Ja	Nein
Halbgruppe	Ja	Ja	Ja	Nein	Nein
Magma	Ja	Ja	Nein	Nein	Nein
Groupoid	Ja	Nein	Ja	Ja	Ja
Kategorie	Nein	Nein	Ja	Ja	Nein
Halbkategorie	Nein	Nein	Ja	Nein	Nein
Prekategorie	Nein	Nein	Nein	Nein	Nein

Eulerscher Polyedersatz

Leonard Euler
(15.04.1707-18.09.1783)

Eulerscher Polyedersatz (1736)

Sei $P \subset \mathbb{R}^3$ ein konvexes Polyeder mit E Ecken, K Kanten und F Flächen. Dann gilt

$$\chi = E - K + F = 2.$$

Hierbei bezeichnet χ die Euler Charakteristik.

Eulerscher Polyedersatz

Polyeder	**E**	**K**	**F**	χ
Tetraeder	4	6	4	2
Würfel	8	12	6	2
Oktaeder	6	12	8	2
Dodekaeder	20	30	12	2
Isokaeder	12	30	20	2

Eulerscher Polyedersatz (1736)

Sei $P \subset \mathbb{R}^3$ ein konvexes Polyeder mit E Ecken, K Kanten und F Flächen. Dann gilt

$$\chi = E - K + F = 2.$$

Hierbei bezeichnet χ die Euler Charakteristik.

Probleme des Satzes

- Der Eulersche Polyedersatz ist in seiner ursprünglichen Formulierung intrinsisch, d.h. er hängt von der Einbettung des Polyeder ab.

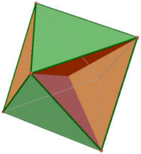
Probleme des Satzes

- Der Eulersche Polyedersatz ist in seiner ursprünglichen Formulierung intrinsisch, d.h. er hängt von der Einbettung des Polyeder ab.
- Er beantwortet die Frage nicht, was für nicht konvexe Polyeder gilt.

Probleme des Satzes

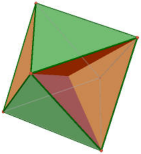
- Der Eulersche Polyedersatz ist in seiner ursprünglichen Formulierung intrinsisch, d.h. er hängt von der Einbettung des Polyeder ab.
- Er beantwortet die Frage nicht, was für nicht konvexe Polyeder gilt.

- Ein Tetrahemihexahedron hat aber z.B. $E = 6, K = 12$ und $F = 7$, also $\chi = 1$.



Probleme des Satzes

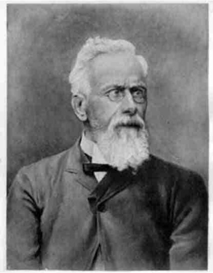
- Der Eulersche Polyedersatz ist in seiner ursprünglichen Formulierung intrinsisch, d.h. er hängt von der Einbettung des Polyeder ab.
- Er beantwortet die Frage nicht, was für nicht konvexe Polyeder gilt.
- Ein Tetrahemihexahedron hat aber z.B. $E = 6, K = 12$ und $F = 7$, also $\chi = 1$.



- Eine allgemeinere Formulierung ist wünschenswert!

Zwei bedeutende Mathematiker

Georg Friedrich Bernhard Riemann
(17.09.1826-20.07.1866)



Enrico Betti
(21.10.1823-11.08.1892)

Bettizahlen - erste Schritte (1857)

- Bernhard Riemann definiert bereits in seiner berühmten Abhandlung „Theorie der Abel'scher Functionen" (1857) eine frühe Version der Bettizahlen.

Bettizahlen - erste Schritte (1857)

- Bernhard Riemann definiert bereits in seiner berühmten Abhandlung „Theorie der Abel'scher Functionen" (1857) eine frühe Version der Bettizahlen.
- Er sagt eine Fläche S sei n-fach zusammenhängend, wenn maximal n Kurven C_k so existieren, dass keine Teilmenge der C_k einen Rand eines Teils von S bilden.

Bettizahlen - erste Schritte (1857)

- Bernhard Riemann definiert bereits in seiner berühmten Abhandlung „Theorie der Abel'scher Functionen" (1857) eine frühe Version der Bettizahlen.
- Er sagt eine Fläche S sei n-fach zusammenhängend, wenn maximal n Kurven C_k so existieren, dass keine Teilmenge der C_k einen Rand eines Teils von S bilden. Diese Zahl nennt er Zusammenhangszahl $\mathcal{Z}$.

Bettizahlen - erste Schritte (1857)

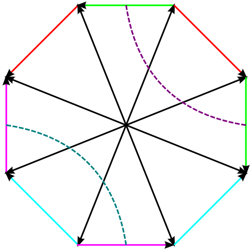
- Bernhard Riemann definiert bereits in seiner berühmten Abhandlung „Theorie der Abel'scher Functionen" (1857) eine frühe Version der Bettizahlen.
- Er sagt eine Fläche S sei n-fach zusammenhängend, wenn maximal n Kurven C_k so existieren, dass keine Teilmenge der C_k einen Rand eines Teils von S bilden. Diese Zahl nennt er Zusammenhangszahl $\mathcal{Z}$.
- Er zeigt, dass $\mathcal{Z}$ nicht von der Wahl der Kurven abhängt.

Bettizahlen - erste Schritte (1857)

- Weiter zeigt er, dass $\mathcal{Z}$ der maximalen Anzahl der überschneidungsfreien Schnitte so entspricht, dass S danach zusammenhängend bleibt.

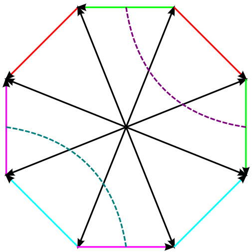
Bettizahlen - erste Schritte (1857)

- Weiter zeigt er, dass $\mathcal{Z}$ der maximalen Anzahl der überschneidungsfreien Schnitte so entspricht, dass S danach zusammenhängend bleibt.



Bettizahlen - erste Schritte (1857)

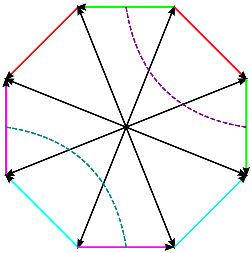
- Weiter zeigt er, dass $\mathcal{Z}$ der maximalen Anzahl der überschneidungsfreien Schnitte so entspricht, dass S danach zusammenhängend bleibt.



- Aus heutiger Sicht ist $\mathcal{Z} = 2 \dim \mathrm{H}_1(S, \mathbb{Z}/2)$

Bettizahlen - erste Schritte (1857)

- Weiter zeigt er, dass $\mathcal{Z}$ der maximalen Anzahl der überschneidungsfreien Schnitte so entspricht, dass S danach zusammenhängend bleibt.



- Aus heutiger Sicht ist $\mathcal{Z} = 2 \dim \mathrm{H}_1(S, \mathbb{Z}/2)$ und die Interaktion der Schnitte mit den C_k ist ein erster Hinweis auf die Poincaré Dualität.

Probleme mit Riemanns Formulierung

- Bernhard Riemann ist sehr ungenau mit den Begriffen Fläche, Kurve, Schnitt und Teil.

Probleme mit Riemanns Formulierung

- Bernhard Riemann ist sehr ungenau mit den Begriffen Fläche, Kurve, Schnitt und Teil.
- Tatsächlich klappt eine Teil seines Beweises deswegen auch nicht.

Probleme mit Riemanns Formulierung

- Bernhard Riemann ist sehr ungenau mit den Begriffen Fläche, Kurve, Schnitt und Teil.
- Tatsächlich klappt eine Teil seines Beweises deswegen auch nicht.
- Weiter ist seine Konstruktion von der Wahl einer Basis des $\mathbb{R}^3$ abhängig.

Probleme mit Riemanns Formulierung

- Bernhard Riemann ist sehr ungenau mit den Begriffen Fläche, Kurve, Schnitt und Teil.
- Tatsächlich klappt eine Teil seines Beweises deswegen auch nicht.
- Weiter ist seine Konstruktion von der Wahl einer Basis des $\mathbb{R}^3$ abhängig.
- Erst Enrico Betti schafft es 1871 mit genaueren Begriffen zu zeigen, dass $\mathscr{Z}$ eine Invariante der Fläche ist

Probleme mit Riemanns Formulierung

- Bernhard Riemann ist sehr ungenau mit den Begriffen Fläche, Kurve, Schnitt und Teil.
- Tatsächlich klappt eine Teil seines Beweises deswegen auch nicht.
- Weiter ist seine Konstruktion von der Wahl einer Basis des $\mathbb{R}^3$ abhängig.
- Erst Enrico Betti schafft es 1871 mit genaueren Begriffen zu zeigen, dass $\mathscr{Z}$ eine Invariante der Fläche ist (allerdings ist sein Beweis noch fehlerhaft).

Zwei fundamentale Begriffe der Topologie

Jules Henri Poincaré
(29.04.1854-17.07.1912)

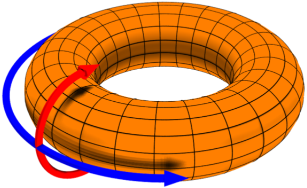
Zwei fundamentale Begriffe der Topologie

Jules Henri Poincaré
(29.04.1854-17.07.1912)

Die Fundamentalgruppe („Analysis Situs“ 1895)

Sei M eine stückweise lineare n-Mannigfaltigkeit (variété). Sei $m \in M$. Dann ist die Gruppe aller Homotopieklassen von Schleifen fundiert in m, genannt $\pi_1(M, m)$, eine Invariante von M.

Zwei fundamentale Begriffe der Topologie



Die Fundamentalgruppe („Analysis Situs“ 1895)

Sei M eine stückweise lineare n-Mannigfaltigkeit (variété). Sei $m \in M$. Dann ist die Gruppe aller Homotopieklassen von Schleifen fundiert in m, genannt $\pi_1(M, m)$, eine Invariante von M.

Zwei fundamentale Begriffe der Topologie

Die Bettizahlen und Dualität („Analysis Situs“ 1895)

Sei M eine stückweise lineare n-Mannigfaltigkeit (variété). Dann sind die Bettizahlen b_k eine Invariante von M. Weiter gilt $b_k = b_{n-k}$ und die alternierende Summe ist $\chi = \sum_k (-1)^k b_k$.

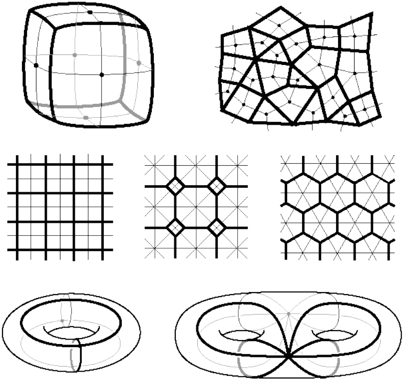
Die Fundamentalgruppe („Analysis Situs“ 1895)

Sei M eine stückweise lineare n-Mannigfaltigkeit (variété). Sei $m \in M$. Dann ist die Gruppe aller Homotopieklassen von Schleifen fundiert in m, genannt $\pi_1(M, m)$, eine Invariante von M.

Zwei fundamentale Begriffe der Topologie

Die Bettizahlen und Dualität („Analysis Situs“ 1895)

Sei M eine stückweise lineare n-Mannigfaltigkeit (variété). Dann sind die Bettizahlen b_k eine Invariante von M. Weiter gilt $b_k = b_{n-k}$ und die alternierende Summe ist $\chi = \sum_k (-1)^k b_k$.



Ein fundamental neuer Standpunkt

- Henri Poincaré ist auch nicht sehr strikt mit seinen Formulierungen, was aber im Laufe der nächsten Jahre durch andere angepasst wird.

Ein fundamental neuer Standpunkt

- Henri Poincaré ist auch nicht sehr strikt mit seinen Formulierungen, was aber im Laufe der nächsten Jahre durch andere angepasst wird.
- Das eigentliche Problem ist, dass fast alle seine Argumente sehr spezifisch sind und deswegen sehr kompliziert werden und auch ad hoc wirken.

Ein fundamental neuer Standpunkt

- Henri Poincaré ist auch nicht sehr strikt mit seinen Formulierungen, was aber im Laufe der nächsten Jahre durch andere angepasst wird.
- Das eigentliche Problem ist, dass fast alle seine Argumente sehr spezifisch sind und deswegen sehr kompliziert werden und auch ad hoc wirken. Es fehlt der größere Zusammenhang.

Ein fundamental neuer Standpunkt

- Henri Poincaré ist auch nicht sehr strikt mit seinen Formulierungen, was aber im Laufe der nächsten Jahre durch andere angepasst wird.
- Das eigentliche Problem ist, dass fast alle seine Argumente sehr spezifisch sind und deswegen sehr kompliziert werden und auch ad hoc wirken. Es fehlt der größere Zusammenhang. Weiter sind viele seiner Definitionen nur für eine spezielle Klasse von Räumen gültig.

Ein fundamental neuer Standpunkt

- Henri Poincaré ist auch nicht sehr strikt mit seinen Formulierungen, was aber im Laufe der nächsten Jahre durch andere angepasst wird.
- Das eigentliche Problem ist, dass fast alle seine Argumente sehr spezifisch sind und deswegen sehr kompliziert werden und auch ad hoc wirken. Es fehlt der größere Zusammenhang. Weiter sind viele seiner Definitionen nur für eine spezielle Klasse von Räumen gültig.
- Aber sein Werk ist trotzdem sehr einflussreich und inspiriert ein große Zahl nachfolgender Mathematiker.

Ein fundamental neuer Standpunkt

- Henri Poincaré ist auch nicht sehr strikt mit seinen Formulierungen, was aber im Laufe der nächsten Jahre durch andere angepasst wird.
- Das eigentliche Problem ist, dass fast alle seine Argumente sehr spezifisch sind und deswegen sehr kompliziert werden und auch ad hoc wirken. Es fehlt der größere Zusammenhang. Weiter sind viele seiner Definitionen nur für eine spezielle Klasse von Räumen gültig.
- Aber sein Werk ist trotzdem sehr einflussreich und inspiriert ein große Zahl nachfolgender Mathematiker. Im Laufe der nächsten Jahrzehnte werden viele Fortschritte gemacht, wie z.B. Torsions Koeffizienten, die Künneth-Formel und der Fixpunktsatz von Brouwer.

Ein fundamental neuer Standpunkt

- Henri Poincaré ist auch nicht sehr strikt mit seinen Formulierungen, was aber im Laufe der nächsten Jahre durch andere angepasst wird.
- Das eigentliche Problem ist, dass fast alle seine Argumente sehr spezifisch sind und deswegen sehr kompliziert werden und auch ad hoc wirken. Es fehlt der größere Zusammenhang. Weiter sind viele seiner Definitionen nur für eine spezielle Klasse von Räumen gültig.
- Aber sein Werk ist trotzdem sehr einflussreich und inspiriert ein große Zahl nachfolgender Mathematiker. Im Laufe der nächsten Jahrzehnte werden viele Fortschritte gemacht, wie z.B. Torsions Koeffizienten, die Künneth-Formel und der Fixpunktsatz von Brouwer.
- Allerdings lassen die Fortschritte lange auf sich warten und viele der Theorem haben einen komplizierten Beweis.

The Göttingen connection

Amalie Emmy Noether
(23.03.1882-14.05.1935)

Heinz Hopf
(19.11.1894-03.06.1971)

Bettizahlen als Gruppen (1925-1927)

- Während ihrer Vorlesung und während der Vorlesung von Heinz Hopf entwickelte Emmy Noether ein bahnbrechendes neues Konzept zum Studium der Bettizahlen.

Bettizahlen als Gruppen (1925-1927)

- Während ihrer Vorlesung und während der Vorlesung von Heinz Hopf entwickelte Emmy Noether ein bahnbrechendes neues Konzept zum Studium der Bettizahlen. Sie fasste sie als abelsche Gruppen auf und nicht nur als Zahlen, die wohl bekannten Homologiegruppen $\mathrm{H}_i(\cdot)$.

Bettizahlen als Gruppen (1925-1927)

- Während ihrer Vorlesung und während der Vorlesung von Heinz Hopf entwickelte Emmy Noether ein bahnbrechendes neues Konzept zum Studium der Bettizahlen. Sie fasste sie als abelsche Gruppen auf und nicht nur als Zahlen, die wohl bekannten Homologiegruppen $\mathrm{H}_i(\cdot)$.
- Heinz Hopf erkannte den Vorteil dieser Sichtweise: zwischen Gruppen gibt es zusätzlich noch Abbildungen, welche man studieren kann.

Bettizahlen als Gruppen (1925-1927)

- Während ihrer Vorlesung und während der Vorlesung von Heinz Hopf entwickelte Emmy Noether ein bahnbrechendes neues Konzept zum Studium der Bettizahlen. Sie fasste sie als abelsche Gruppen auf und nicht nur als Zahlen, die wohl bekannten Homologiegruppen $\mathrm{H}_i(\cdot)$.
- Heinz Hopf erkannte den Vorteil dieser Sichtweise: zwischen Gruppen gibt es zusätzlich noch Abbildungen, welche man studieren kann. Tatsächlich sind diese sogar interessanter als die Gruppen selbst. eine Erkenntnis, welche in der Kategorientheorie konsequent fortgesetzt wird: Morphismen sind wichtiger als Objekte, 2-Morphismen als Morphismen usw.

Bettizahlen als Gruppen (1925-1927)

- Während ihrer Vorlesung und während der Vorlesung von Heinz Hopf entwickelte Emmy Noether ein bahnbrechendes neues Konzept zum Studium der Bettizahlen. Sie fasste sie als abelsche Gruppen auf und nicht nur als Zahlen, die wohl bekannten Homologiegruppen $\mathrm{H}_i(\cdot)$.
- Heinz Hopf erkannte den Vorteil dieser Sichtweise: zwischen Gruppen gibt es zusätzlich noch Abbildungen, welche man studieren kann. Tatsächlich sind diese sogar interessanter als die Gruppen selbst. eine Erkenntnis, welche in der Kategorientheorie konsequent fortgesetzt wird: Morphismen sind wichtiger als Objekte, 2-Morphismen als Morphismen usw.
- Aus heutiger Sicht würde man sagen Emmy Noether und Heinz Hopf haben den Begriff „Bettizahl“ kategorifiziert.

Kettenkomplexe (1929)

- Nur kurze Zeit später, nämlich bereits 1929, veröffentlicht der australische Mathematiker Walther Mayer die rein algebraische Notation des Kettenkomplexes und stellt damit die Homologiegruppen dar.

Kettenkomplexe (1929)

- Nur kurze Zeit später, nämlich bereits 1929, veröffentlicht der australische Mathematiker Walther Mayer die rein algebraische Notation des Kettenkomplexes und stellt damit die Homologiegruppen dar.

$$\ldots \xleftarrow{\delta_{i-1}} C_{i-1}(\cdot) \xleftarrow{\delta_i} C_i(\cdot) \xleftarrow{\delta_{i+1}} C_{i+1}(\cdot) \xleftarrow{\delta_{i+2}} \ldots$$

Kettenkomplexe (1929)

- Nur kurze Zeit später, nämlich bereits 1929, veröffentlicht der australische Mathematiker Walther Mayer die rein algebraische Notation des Kettenkomplexes und stellt damit die Homologiegruppen dar.

$$\dots \xleftarrow{\delta_{i-1}} C_{i-1}(\cdot) \xleftarrow{\delta_i} C_i(\cdot) \xleftarrow{\delta_{i+1}} C_{i+1}(\cdot) \xleftarrow{\delta_{i+2}} \dots$$

Hierbei ist $\delta_i \circ \delta_{i+1} = 0$, was es deswegen erlaubt $\mathrm{H}_i(\cdot) = \ker(\delta_i)/\mathrm{im}(\delta_{i+1})$ zu definieren. Damit ist die Euler Charakteristik $\sum_k (-1)^k \mathrm{rk}(\mathrm{H}_k(\cdot))$.

Kettenkomplexe (1929)

- Nur kurze Zeit später, nämlich bereits 1929, veröffentlicht der australische Mathematiker Walther Mayer die rein algebraische Notation des Kettenkomplexes und stellt damit die Homologiegruppen dar.

$$\ldots \xleftarrow{\delta_{i-1}} C_{i-1}(\cdot) \xleftarrow{\delta_i} C_i(\cdot) \xleftarrow{\delta_{i+1}} C_{i+1}(\cdot) \xleftarrow{\delta_{i+2}} \ldots$$

  Hierbei ist $\delta_i \circ \delta_{i+1} = 0$, was es deswegen erlaubt $\mathrm{H}_i(\cdot) = \ker(\delta_i)/\mathrm{im}(\delta_{i+1})$ zu definieren. Damit ist die Euler Charakteristik $\sum_k (-1)^k \mathrm{rk}(\mathrm{H}_k(\cdot))$.
- Aus heutiger Sicht würde man sagen Walther Mayer hat den Begriff „Euler Charakteristik“ kategorifiziert.

Karten und Kaffeetassen

Fixpunktsatz von Brouwer (1909)

Sei $f : D^n \to D^n$ stetig. Dann hat f mindestens einen Fixpunkt.

Karten und Kaffeetassen

Fixpunktsatz von Brouwer (1909)

Sei $f: D^n \to D^n$ stetig. Dann hat f mindestens einen Fixpunkt.

Beweis.

Folgt direkt aus dem Lefschetzen Fixpunktsatz, welcher besagt, dass jede stetige Selbstabbildung $f: X \to X$ zwischen einem endlichen CW Komplex X mit $\Lambda_f \neq 0$ einen Fixpunkt besitzt. Hierbei ist

$$\Lambda_f = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \mathrm{Tr}(\mathrm{H}_k(f,\mathbb{Q})\colon \mathrm{H}_k(X,\mathbb{Q}) \to \mathrm{H}_k(X,\mathbb{Q}))$$

und die einzige nicht triviale Homologiegruppe von D^n ist H_0. $\square$

Karten und Kaffeetassen

Fixpunktsatz von Brouwer (1909)

Sei $f\colon D^n \to D^n$ stetig. Dann hat f mindestens einen Fixpunkt.

Beweis.

Folgt direkt aus dem Lefschetzen Fixpunktsatz, welcher besagt, dass jede stetige Selbstabbildung $f\colon X \to X$ zwischen einem endlichen CW Komplex X mit $\Lambda_f \neq 0$ einen Fixpunkt besitzt. Hierbei ist

$$\Lambda_f = \sum_{k\geq 0} (-1)^k \mathrm{Tr}(\mathrm{H}_k(f,\mathbb{Q})\colon \mathrm{H}_k(X,\mathbb{Q}) \to \mathrm{H}_k(X,\mathbb{Q}))$$

und die einzige nicht triviale Homologiegruppe von D^n ist H_0. □

Ohne die Abbildungen (Morphismen) zwischen den Gruppen ist obiger Beweis nicht möglich.

Karten und Kaffeetassen

In einer Dimension ist der Fixpunktsatz von Brouwer nur der Zwischenwertsatz.

Karten und Kaffeetassen

In einer Dimension ist der Fixpunktsatz von Brouwer nur der Zwischenwertsatz. In zwei Dimensionen sagt er, dass auf jeder Karte mindestens ein Punkt fixiert wird; der "you are here" Marker.

Karten und Kaffeetassen

In einer Dimension ist der Fixpunktsatz von Brouwer nur der Zwischenwertsatz. In zwei Dimensionen sagt er, dass auf jeder Karte mindestens ein Punkt fixiert wird; der "you are here" Marker. In drei Dimensionen sagt er, dass man seinen Kaffee beliebig stark rühren kann: ein Punkt bleibt fix.

Der Fundamentalsatz der Algebra

Fundamentalsatz der Algebra (Folklore)

Sei $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ ein Polynom mit $n > 0$ und $a_k \in \mathbb{C}$. Dann hat p mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Der Fundamentalsatz der Algebra

Fundamentalsatz der Algebra (Folklore)

Sei $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ ein Polynom mit $n > 0$ und $a_k \in \mathbb{C}$. Dann hat p mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis.

Es ist $\mathrm{H}_1(S^1) = \mathbb{Z}$ und die einzigen Gruppenhomomorphismen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sind die Multiplikationen mit $\pm n$.
Weiter ist $\mathrm{H}_1(z \to z^n) = \cdot n$ die Multiplikation mit n für alle $n \in \mathbb{N}$.
Angenommen es gibt p ohne Nullstelle.

$\square$

Der Fundamentalsatz der Algebra

Fundamentalsatz der Algebra (Folklore)

Sei $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ ein Polynom mit $n > 0$ und $a_k \in \mathbb{C}$. Dann hat p mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis.

Wird definieren $H, H' \colon S^1 \times [0,1] \to S^1$ durch

$$H_t(z) = \frac{p(tz)}{|p(tz)|} \text{ und } H'_t(z) = \frac{(1-t)H_t(z) + tz^n}{|(1-t)H_t(z) + tz^n|}$$

(es ist nicht schwer zu zeigen, dass beide Nenner unter der Annahme, dass p keine Nullstelle hat, nie Null werden!) zwei Homotopien von der Konstanten Abbildung zu p und von p zu $z \to z^n$.

Damit folgt direkt ein Widerspruch, denn diese Homotopie impliziert $\cdot 0 = \mathrm{H}_1(\mathrm{const}) = \mathrm{H}_1(z \to z^n) = \cdot n$. $\square$

Morphismen und Äquivalenz

Die beiden Beispiele illustrieren zwei fundamentale Konzepte der Kategorientheorie:

Morphismen und Äquivalenz

Die beiden Beispiele illustrieren zwei fundamentale Konzepte der Kategorientheorie:

- Morphismen sind mindestens genauso interessant wie die Objekte. Wenn nicht sogar interessanter.

Morphismen und Äquivalenz

Die beiden Beispiele illustrieren zwei fundamentale Konzepte der Kategorientheorie:

- Morphismen sind mindestens genauso interessant wie die Objekte. Wenn nicht sogar interessanter.
- In den beiden Beispielen waren viele Begriffe nur bis auf eine Homotopie gegeben. In der Tat ist es eine wichtige Frage der Kategorientheorie, welche Äquivalenzrelationen "richtig" sind.

Morphismen und Äquivalenz

Die beiden Beispiele illustrieren zwei fundamentale Konzepte der Kategorientheorie:

- Morphismen sind mindestens genauso interessant wie die Objekte. Wenn nicht sogar interessanter.
- In den beiden Beispielen waren viele Begriffe nur bis auf eine Homotopie gegeben. In der Tat ist es eine wichtige Frage der Kategorientheorie, welche Äquivalenzrelationen "richtig" sind. So ist es z.B. für Objekte Isomorphie,

Morphismen und Äquivalenz

Die beiden Beispiele illustrieren zwei fundamentale Konzepte der Kategorientheorie:

- Morphismen sind mindestens genauso interessant wie die Objekte. Wenn nicht sogar interessanter.
- In den beiden Beispielen waren viele Begriffe nur bis auf eine Homotopie gegeben. In der Tat ist es eine wichtige Frage der Kategorientheorie, welche Äquivalenzrelationen "richtig" sind. So ist es z.B. für Objekte Isomorphie, für Funktoren ist es natürliche Äquivalenz

Morphismen und Äquivalenz

Die beiden Beispiele illustrieren zwei fundamentale Konzepte der Kategorientheorie:

- Morphismen sind mindestens genauso interessant wie die Objekte. Wenn nicht sogar interessanter.
- In den beiden Beispielen waren viele Begriffe nur bis auf eine Homotopie gegeben. In der Tat ist es eine wichtige Frage der Kategorientheorie, welche Äquivalenzrelationen "richtig" sind. So ist es z.B. für Objekte Isomorphie, für Funktoren ist es natürliche Äquivalenz und für Kategorien ist es Äquivalenz.

Morphismen und Äquivalenz

Die beiden Beispiele illustrieren zwei fundamentale Konzepte der Kategorientheorie:

- Morphismen sind mindestens genauso interessant wie die Objekte. Wenn nicht sogar interessanter.
- In den beiden Beispielen waren viele Begriffe nur bis auf eine Homotopie gegeben. In der Tat ist es eine wichtige Frage der Kategorientheorie, welche Äquivalenzrelationen "richtig" sind. So ist es z.B. für Objekte Isomorphie, für Funktoren ist es natürliche Äquivalenz und für Kategorien ist es Äquivalenz.
- Für höhere Kategorien werden die beiden Punkte sogar noch wichtiger.

Kategorifizieren hilft

Die neue Sichtweise auf die Bettizahlen von Emmy Noether, Heinz Hopf und Walther Mayer hat eine rasante Entwicklung in der Topologie hervorgebracht. Und das trotz der politischen und kriegsbedingten Schwierigkeiten 1930-1945.

Kategorifizieren hilft

Die neue Sichtweise auf die Bettizahlen von Emmy Noether, Heinz Hopf und Walther Mayer hat eine rasante Entwicklung in der Topologie hervorgebracht. Und das trotz der politischen und kriegsbedingten Schwierigkeiten 1930-1945.
Hier eine unvollständige und rein subjektive Liste der "wichtigsten" Ereignisse innerhalb der Topologie/Algebra der Jahre 1930-1945:

Kategorifizieren hilft

Die neue Sichtweise auf die Bettizahlen von Emmy Noether, Heinz Hopf und Walther Mayer hat eine rasante Entwicklung in der Topologie hervorgebracht. Und das trotz der politischen und kriegsbedingten Schwierigkeiten 1930-1945.
Hier eine unvollständige und rein subjektive Liste der "wichtigsten" Ereignisse innerhalb der Topologie/Algebra der Jahre 1930-1945:

- Verschiedene Konstruktionen von Homologietheorien (Alexander, Alexandroff, Lefschetz, Čech usw.), darunter auch Cohomologietheorien wie de Rham (1931) (duale Konzepte).

Kategorifizieren hilft

Die neue Sichtweise auf die Bettizahlen von Emmy Noether, Heinz Hopf und Walther Mayer hat eine rasante Entwicklung in der Topologie hervorgebracht. Und das trotz der politischen und kriegsbedingten Schwierigkeiten 1930-1945.
Hier eine unvollständige und rein subjektive Liste der "wichtigsten" Ereignisse innerhalb der Topologie/Algebra der Jahre 1930-1945:

- Verschiedene Konstruktionen von Homologietheorien (Alexander, Alexandroff, Lefschetz, Čech usw.), darunter auch Cohomologietheorien wie de Rham (1931) (duale Konzepte).
- Homologie von Lie-Gruppen (Pontrjagin (1935), Hopf (1941)). Daraus entwickelte sich der Begriff Hopf Algebra, einer Algebra mit Comultiplikation (Pfeile umdrehen).

Kategorifizieren hilft

Die neue Sichtweise auf die Bettizahlen von Emmy Noether, Heinz Hopf und Walther Mayer hat eine rasante Entwicklung in der Topologie hervorgebracht. Und das trotz der politischen und kriegsbedingten Schwierigkeiten 1930-1945.

Hier eine unvollständige und rein subjektive Liste der "wichtigsten" Ereignisse innerhalb der Topologie/Algebra der Jahre 1930-1945:

- Verschiedene Konstruktionen von Homologietheorien (Alexander, Alexandroff, Lefschetz, Čech usw.), darunter auch Cohomologietheorien wie de Rham (1931) (duale Konzepte).
- Homologie von Lie-Gruppen (Pontrjagin (1935), Hopf (1941)). Daraus entwickelte sich der Begriff Hopf Algebra, einer Algebra mit Comultiplikation (Pfeile umdrehen).
- Universellen Koeffizienten Theoreme von Čech (1935) ($\mathbb{Z}$ ist ein universelles Objekt der Kategorie der abelschen Gruppen).

Kategorifizieren hilft

Die neue Sichtweise auf die Bettizahlen von Emmy Noether, Heinz Hopf und Walther Mayer hat eine rasante Entwicklung in der Topologie hervorgebracht. Und das trotz der politischen und kriegsbedingten Schwierigkeiten 1930-1945.
Hier eine unvollständige und rein subjektive Liste der "wichtigsten" Ereignisse innerhalb der Topologie/Algebra der Jahre 1930-1945:

- Verschiedene Konstruktionen von Homologietheorien (Alexander, Alexandroff, Lefschetz, Čech usw.), darunter auch Cohomologietheorien wie de Rham (1931) (duale Konzepte).
- Homologie von Lie-Gruppen (Pontrjagin (1935), Hopf (1941)). Daraus entwickelte sich der Begriff Hopf Algebra, einer Algebra mit Comultiplikation (Pfeile umdrehen).
- Universellen Koeffizienten Theoreme von Čech (1935) ($\mathbb{Z}$ ist ein universelles Objekt der Kategorie der abelschen Gruppen).
- Höhere Homotopiegruppen von Hurewicz (1935) Homotopie in Kategorien).

Kategorifizieren hilft

- Die mathematische Beschreibung von Tensorprodukten wurde aus der Homologie von Tangentialbündeln von Whitney (1938) hergeleitet (monoidale Kategorien).

Kategorifizieren hilft

- Die mathematische Beschreibung von Tensorprodukten wurde aus der Homologie von Tangentialbündeln von Whitney (1938) hergeleitet (monoidale Kategorien).
- Definition und Theoreme für exakte Sequenzen von Hurewicz (1941). Hierbei spielt δ eine große Rolle (als natürliche Transformation).

Kategorifizieren hilft

- Die mathematische Beschreibung von Tensorprodukten wurde aus der Homologie von Tangentialbündeln von Whitney (1938) hergeleitet (monoidale Kategorien).
- Definition und Theoreme für exakte Sequenzen von Hurewicz (1941). Hierbei spielt δ eine große Rolle (als natürliche Transformation).
- Eilenberg und Mac Lane diskutieren $\mathrm{Hom}, \mathrm{Tor}, \mathrm{Ext}$ algebraisch (1942). Dabei entstehen neue Begriffe (es sind Funktoren).

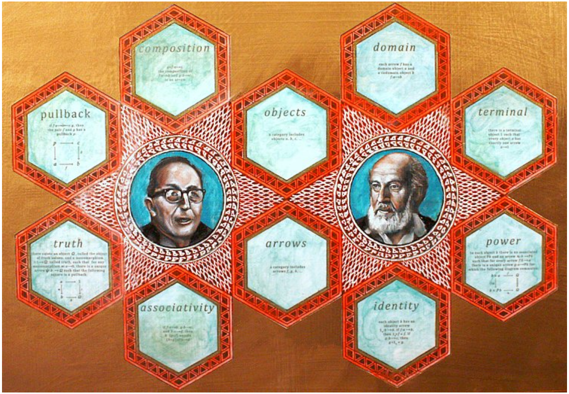
Kategorifizieren hilft

- Die mathematische Beschreibung von Tensorprodukten wurde aus der Homologie von Tangentialbündeln von Whitney (1938) hergeleitet (monoidale Kategorien).
- Definition und Theoreme für exakte Sequenzen von Hurewicz (1941). Hierbei spielt δ eine große Rolle (als natürliche Transformation).
- Eilenberg und Mac Lane diskutieren $\mathrm{Hom}, \mathrm{Tor}, \mathrm{Ext}$ algebraisch (1942). Dabei entstehen neue Begriffe (es sind Funktoren).
- Eilenberg und Steenrod geben eine axiomatische Definition von (Co-)Homologietheorie (1945), welche später (1962) von Milnor ergänzt wird (auch H ist ein Funktor).

Kategorifizieren hilft

- Die mathematische Beschreibung von Tensorprodukten wurde aus der Homologie von Tangentialbündeln von Whitney (1938) hergeleitet (monoidale Kategorien).
- Definition und Theoreme für exakte Sequenzen von Hurewicz (1941). Hierbei spielt δ eine große Rolle (als natürliche Transformation).
- Eilenberg und Mac Lane diskutieren $\mathrm{Hom}, \mathrm{Tor}, \mathrm{Ext}$ algebraisch (1942). Dabei entstehen neue Begriffe (es sind Funktoren).
- Eilenberg und Steenrod geben eine axiomatische Definition von (Co-)Homologietheorie (1945), welche später (1962) von Milnor ergänzt wird (auch H ist ein Funktor).
- Aber noch viel mehr...

Zwei historische Persönlichkeiten



Links: Saunders Mac Lane (04.08.1909-14.04.2005)
Rechts: Samuel Eilenberg (30.09.1913-30.01.1998)

Definition von Eilenberg und Mac Lane

Der Begriff "Kategorie" erschien in Samuel Eilenbergs und Saunders Mac Lanes Artikel „General Theory of Natural Equivalences“ im Jahr 1945 fast aus dem Nichts. Es gab nur eine auf Gruppen beschränkte Notation in einem Artikel von ihnen aus dem Jahr 1942.

Definition von Eilenberg und Mac Lane

Der Begriff "Kategorie" erschien in Samuel Eilenbergs und Saunders Mac Lanes Artikel „General Theory of Natural Equivalences“ im Jahr 1945 fast aus dem Nichts. Es gab nur eine auf Gruppen beschränkte Notation in einem Artikel von ihnen aus dem Jahr 1942.
Wie der Titel bereits suggeriert waren sie allerdings nicht so sehr an Kategorien interessiert, sondern an natürlichen Transformationen, welche sie auch nicht zum Selbstzweck einführten, sondern um Effekte aus der homologischen Algebra zu beschreiben (z.B. mit Homologiegruppen $\mathrm{H}_n(\cdot)$).

Definition von Eilenberg und Mac Lane

Der Begriff "Kategorie" erschien in Samuel Eilenbergs und Saunders Mac Lanes Artikel „General Theory of Natural Equivalences“ im Jahr 1945 fast aus dem Nichts. Es gab nur eine auf Gruppen beschränkte Notation in einem Artikel von ihnen aus dem Jahr 1942.
Wie der Titel bereits suggeriert waren sie allerdings nicht so sehr an Kategorien interessiert, sondern an natürlichen Transformationen, welche sie auch nicht zum Selbstzweck einführten, sondern um Effekte aus der homologischen Algebra zu beschreiben (z.B. mit Homologiegruppen $\mathrm{H}_n(\cdot)$).
Auch die Begriffe "Funktor", "Limes" und "Colimes" tauchen in dem Artikel zum ersten mal auf.

Definition von Eilenberg und Mac Lane

Sie übernahmen den Begriff "Kategorie" aus der Philosophie, nämlich von Aristoteles, Kant und Peirce, definierten ihn aber in einer mathematisch strikten Weise.

Definition von Eilenberg und Mac Lane

Sie übernahmen den Begriff "Kategorie" aus der Philosophie, nämlich von Aristoteles, Kant und Peirce, definierten ihn aber in einer mathematisch strikten Weise.
Ihre Definition beinhaltete die Notation der Klasse und Menge, war aber vor Allem eher eine Art Metakalkül.

Definition von Eilenberg und Mac Lane

Sie übernahmen den Begriff "Kategorie" aus der Philosophie, nämlich von Aristoteles, Kant und Peirce, definierten ihn aber in einer mathematisch strikten Weise.
Ihre Definition beinhaltete die Notation der Klasse und Menge, war aber vor Allem eher eine Art Metakalkül.
Sie bemerkten bereits, dass man die Objekte nicht wirklich braucht, die Morphismen sind das Wichtige.

Definition von Eilenberg und Mac Lane

Sie übernahmen den Begriff "Kategorie" aus der Philosophie, nämlich von Aristoteles, Kant und Peirce, definierten ihn aber in einer mathematisch strikten Weise.
Ihre Definition beinhaltete die Notation der Klasse und Menge, war aber vor Allem eher eine Art Metakalkül.
Sie bemerkten bereits, dass man die Objekte nicht wirklich braucht, die Morphismen sind das Wichtige.
Es war 1945 noch nicht absehbar, dass Kategorientheorie mehr ist, als nur eine Sprechweise, um Effekte in der homologischen Algebra, z.B. die Notation Groupoid für die $\pi_n(\cdot)$ (ohne Wahl eines Basispunktes), zu beschreiben.

Eine neue Generation

Das änderte sich in Laufe der nächsten Fünfzehn Jahre. Dabei sind einige Entwicklung hervorzuheben:

Eine neue Generation

Das änderte sich in Laufe der nächsten Fünfzehn Jahre. Dabei sind einige Entwicklung hervorzuheben:

- zwei einflußreiche Bücher von Eilenberg und Steenrod (1952) und Cartan und Eilenberg (1956) führete zu einer jungen Generation von Mathematikern, welche mit den Begriffe aufwuchsen;

Eine neue Generation

Das änderte sich in Laufe der nächsten Fünfzehn Jahre. Dabei sind einige Entwicklung hervorzuheben:

- zwei einflußreiche Bücher von Eilenberg und Steenrod (1952) und Cartan und Eilenberg (1956) führete zu einer jungen Generation von Mathematikern, welche mit den Begriffe aufwuchsen;
- junge Mathematiker wie Buchsbaum und Grothendieck definierten Kategorien "neu" in einem mehr praktische, mengentheoretischen Sinn als Mengen/Abbildungen (1953-1957);

Eine neue Generation

Das änderte sich in Laufe der nächsten Fünfzehn Jahre. Dabei sind einige Entwicklung hervorzuheben:

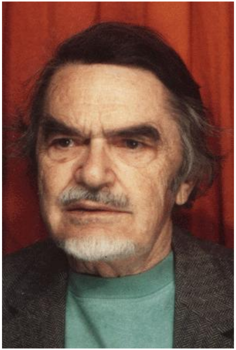
- zwei einflußreiche Bücher von Eilenberg und Steenrod (1952) und Cartan und Eilenberg (1956) führete zu einer jungen Generation von Mathematikern, welche mit den Begriffe aufwuchsen;
- junge Mathematiker wie Buchsbaum und Grothendieck definierten Kategorien "neu" in einem mehr praktische, mengentheoretischen Sinn als Mengen/Abbildungen (1953-1957);
- Grothendieck benutzte die Notationen erstmals außerhalb der homologischen Algebra, nämlich in der algebraischen Geometrie (1957);

Eine neue Generation

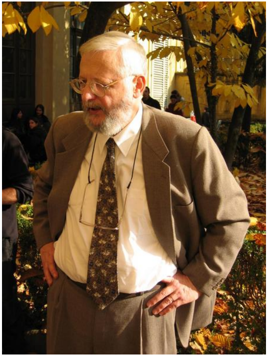
Das änderte sich in Laufe der nächsten Fünfzehn Jahre. Dabei sind einige Entwicklung hervorzuheben:

- zwei einflußreiche Bücher von Eilenberg und Steenrod (1952) und Cartan und Eilenberg (1956) führete zu einer jungen Generation von Mathematikern, welche mit den Begriffe aufwuchsen;
- junge Mathematiker wie Buchsbaum und Grothendieck definierten Kategorien "neu" in einem mehr praktische, mengentheoretischen Sinn als Mengen/Abbildungen (1953-1957);
- Grothendieck benutzte die Notationen erstmals außerhalb der homologischen Algebra, nämlich in der algebraischen Geometrie (1957);
- aber vor Allem die deduktive Definition von Lambek und Lawvere setzte sich Anfang der 1960 wegen ihrer universellen Eleganz durch.

Punkte und Pfeile



Joachim Lambek
(05.12.1922-ongoing)



Francis William Lawvere
(09.02.1937-ongoing)

Punkte und Pfeile

Joachim Lambek und William Lawvere definierten Kategorien auf kombinatorische Weise als rein deduktives System aus Punkten und Pfeilen.

Punkte und Pfeile

Joachim Lambek und William Lawvere definierten Kategorien auf kombinatorische Weise als rein deduktives System aus Punkten und Pfeilen.
In ihrem Sinn ist eine Kategorie eine Ansammlung, welche rein abstrakt zu behandeln ist, d.h. eine Anreihung von Punkten, Pfeilen und Symbolen modulo passender Relationen.

Punkte und Pfeile

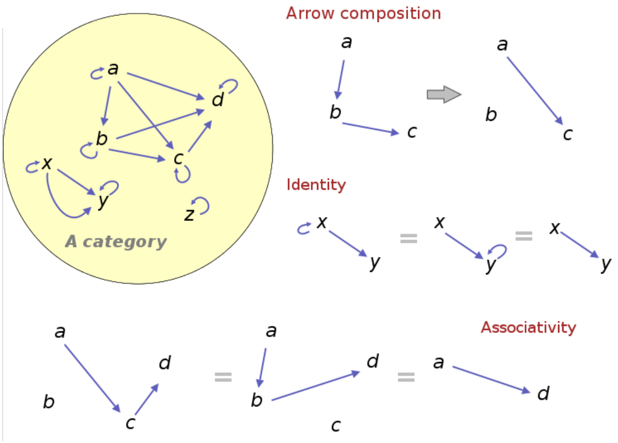
Joachim Lambek und William Lawvere definierten Kategorien auf kombinatorische Weise als rein deduktives System aus Punkten und Pfeilen.
In ihrem Sinn ist eine Kategorie eine Ansammlung, welche rein abstrakt zu behandeln ist, d.h. eine Anreihung von Punkten, Pfeilen und Symbolen modulo passender Relationen.
Pfeile sind z.B. bei ihnen keine Abbildungen, sondern einfach nur logische Symbole. Einen konkreten Sinn kriegt der Kalkül erst durch ein Modell.

Punkte und Pfeile

Joachim Lambek und William Lawvere definierten Kategorien auf kombinatorische Weise als rein deduktives System aus Punkten und Pfeilen.
In ihrem Sinn ist eine Kategorie eine Ansammlung, welche rein abstrakt zu behandeln ist, d.h. eine Anreihung von Punkten, Pfeilen und Symbolen modulo passender Relationen.
Pfeile sind z.B. bei ihnen keine Abbildungen, sondern einfach nur logische Symbole. Einen konkreten Sinn kriegt der Kalkül erst durch ein Modell.
Diese Sichtweise ist nicht nur viel anschaulicher, sondern führt die Arbeitsweise innerhalb der Kategorientheorie direkt vor Augen: Diagramme jagen und universelle Punkte/Pfeile finden.

Punkte und Pfeile

Eine Kategorie in ihrem Sinne ist z.B. auch:



Punkte und Pfeile

Weiter offenbarte diese Sichtweise eine Anwendung von Kategorientheorie als Fundament der gesamten Mathematik.

Punkte und Pfeile

Weiter offenbarte diese Sichtweise eine Anwendung von Kategorientheorie als Fundament der gesamten Mathematik. Die kategorielle Logik war geboren und erfuhr schnell einen großen Erfolg, als es William Lawvere gelang die Kategorie der Kategorien zu definieren (1966).

Punkte und Pfeile

Weiter offenbarte diese Sichtweise eine Anwendung von Kategorientheorie als Fundament der gesamten Mathematik. Die kategorielle Logik war geboren und erfuhr schnell einen großen Erfolg, als es William Lawvere gelang die Kategorie der Kategorien zu definieren (1966).
Die Kategorientheorie hatte nun mehrere Anwendungen, nämlich in homologischer Algebra, algebraischer Geometrie und mathematischer Logik.

Punkte und Pfeile

Weiter offenbarte diese Sichtweise eine Anwendung von Kategorientheorie als Fundament der gesamten Mathematik. Die kategorielle Logik war geboren und erfuhr schnell einen großen Erfolg, als es William Lawvere gelang die Kategorie der Kategorien zu definieren (1966).
Die Kategorientheorie hatte nun mehrere Anwendungen, nämlich in homologischer Algebra, algebraischer Geometrie und mathematischer Logik.
Es fehlte nur noch ein kleiner Schubs, um sie entgültig als eigenständig zu etablieren.

Punkte und Pfeile

Weiter offenbarte diese Sichtweise eine Anwendung von Kategorientheorie als Fundament der gesamten Mathematik. Die kategorielle Logik war geboren und erfuhr schnell einen großen Erfolg, als es William Lawvere gelang die Kategorie der Kategorien zu definieren (1966).
Die Kategorientheorie hatte nun mehrere Anwendungen, nämlich in homologischer Algebra, algebraischer Geometrie und mathematischer Logik.
Es fehlte nur noch ein kleiner Schubs, um sie entgültig als eigenständig zu etablieren.
Der letzte Schubs war wohl die Feststellung von Dan Kan, dass sogenannte Adjunktionen überall in der Mathematik auftauchen.

Die "richtige" Äquivalenz

Ein fundamentale Fragestellung jeder Wissenschaft, nicht nur der Mathematik, ist es, welche Art von Äquivalenz man betrachtet.

Die "richtige" Äquivalenz

Ein fundamentale Fragestellung jeder Wissenschaft, nicht nur der Mathematik, ist es, welche Art von Äquivalenz man betrachtet. Für Mengen bietet sich z.B. die Isomorphie, d.h. Bijektion, als Begriff an.

Die "richtige" Äquivalenz

Ein fundamentale Fragestellung jeder Wissenschaft, nicht nur der Mathematik, ist es, welche Art von Äquivalenz man betrachtet. Für Mengen bietet sich z.B. die Isomorphie, d.h. Bijektion, als Begriff an. Aber will man z.B. Ordinale studieren, so ist dieser Begriff bereits völlig ungeeignet, da man zu viel Struktur vernichtet.

Die "richtige" Äquivalenz

Ein fundamentale Fragestellung jeder Wissenschaft, nicht nur der Mathematik, ist es, welche Art von Äquivalenz man betrachtet. Für Mengen bietet sich z.B. die Isomorphie, d.h. Bijektion, als Begriff an. Aber will man z.B. Ordinale studieren, so ist dieser Begriff bereits völlig ungeeignet, da man zu viel Struktur vernichtet. Dies ist ein Allgemeines Problem: identifiziert man zu viel, so verliert man vielleicht interessante Informationen, identifiziert man zu wenig, so kann man vielleicht keine interessanten Aussagen mehr treffen.

Die "richtige" Äquivalenz

Ein fundamentale Fragestellung jeder Wissenschaft, nicht nur der Mathematik, ist es, welche Art von Äquivalenz man betrachtet. Für Mengen bietet sich z.B. die Isomorphie, d.h. Bijektion, als Begriff an. Aber will man z.B. Ordinale studieren, so ist dieser Begriff bereits völlig ungeeignet, da man zu viel Struktur vernichtet. Dies ist ein Allgemeines Problem: identifiziert man zu viel, so verliert man vielleicht interessante Informationen, identifiziert man zu wenig, so kann man vielleicht keine interessanten Aussagen mehr treffen.
In fast allen Zusammenhängen sind die Extrema, nämlich Gleichheit und "alles ist gleich", viel zu fein bzw. zu grob. Ein sinnvoller Begriff liegt dazwischen.

Die "richtige" Äquivalenz

Betrachten man z.B. die drei bekanntesten Äquivalenzbegriffe der Topologie genauer, nämlich Isotopie, Homöomorhpie und Homotopie, so stellt man fest:

Die "richtige" Äquivalenz

Betrachten man z.B. die drei bekanntesten Äquivalenzbegriffe der Topologie genauer, nämlich Isotopie, Homöomorhpie und Homotopie, so stellt man fest:

- alle Knoten sind homöomorph zu S^1, aber ein nicht trivialer Knoten ist nicht isotop zu S^1;

Die "richtige" Äquivalenz

Betrachten man z.B. die drei bekanntesten Äquivalenzbegriffe der Topologie genauer, nämlich Isotopie, Homöomorhpie und Homotopie, so stellt man fest:

- alle Knoten sind homöomorph zu S^1, aber ein nicht trivialer Knoten ist nicht isotop zu S^1;
- eine Kreisscheibe D^2 ist homotop zu einem Punkt, aber nicht homöomorph;

Die "richtige" Äquivalenz

Betrachten man z.B. die drei bekanntesten Äquivalenzbegriffe der Topologie genauer, nämlich Isotopie, Homöomorhpie und Homotopie, so stellt man fest:

- alle Knoten sind homöomorph zu S^1, aber ein nicht trivialer Knoten ist nicht isotop zu S^1;
- eine Kreisscheibe D^2 ist homotop zu einem Punkt, aber nicht homöomorph;
- die Funktoren $\pi_*(\cdot), \mathrm{H}_*(\cdot)$ sind Homotopie invariant.

Die "richtige" Äquivalenz

Betrachten man z.B. die drei bekanntesten Äquivalenzbegriffe der Topologie genauer, nämlich Isotopie, Homöomorhpie und Homotopie, so stellt man fest:

- alle Knoten sind homöomorph zu S^1, aber ein nicht trivialer Knoten ist nicht isotop zu S^1;
- eine Kreisscheibe D^2 ist homotop zu einem Punkt, aber nicht homöomorph;
- die Funktoren $\pi_*(\cdot), \mathrm{H}_*(\cdot)$ sind Homotopie invariant.

Es gibt also meist keine eindeutige Antwort, sondern meist nur eine "gute".

Die "richtige" Äquivalenz

Betrachten man z.B. die drei bekanntesten Äquivalenzbegriffe der Topologie genauer, nämlich Isotopie, Homöomorhpie und Homotopie, so stellt man fest:

- alle Knoten sind homöomorph zu S^1, aber ein nicht trivialer Knoten ist nicht isotop zu S^1;
- eine Kreisscheibe D^2 ist homotop zu einem Punkt, aber nicht homöomorph;
- die Funktoren $\pi_*(\cdot), \mathrm{H}_*(\cdot)$ sind Homotopie invariant.

Es gibt also meist keine eindeutige Antwort, sondern meist nur eine "gute".

Was ist also ein "guter" Begriff für die Kategorientheorie?

Die "richtige" Äquivalenz

Daniel Marinus Kan
(??-ongoing)

Dan Kan's Antwort (1958)

Isomorphie von Funktoren kommt eigentlich fast nicht vor.
Natürliche Äquivalenz ist das, was wir zwar haben wollen, aber Adjungiertheit ist das, was wir oft kriegen.

Die "richtige" Äquivalenz

Daniel Marinus Kan (genannt Dan Kan) definierte in seinem Artikel „Adjoint Functors“ im Jahr 1958 den Begriff der adjungierten Äquivalenz von Funktoren.

Die "richtige" Äquivalenz

Daniel Marinus Kan (genannt Dan Kan) definierte in seinem Artikel „Adjoint Functors“ im Jahr 1958 den Begriff der adjungierten Äquivalenz von Funktoren.
Dieser stellte sich im Laufe der Jahre als zentral für die Kategorientheorie heraus. Und das obwohl er von allen anderen bis dahin einfach übersehen wurde.

Die "richtige" Äquivalenz

Daniel Marinus Kan (genannt Dan Kan) definierte in seinem Artikel „Adjoint Functors“ im Jahr 1958 den Begriff der adjungierten Äquivalenz von Funktoren.
Dieser stellte sich im Laufe der Jahre als zentral für die Kategorientheorie heraus. Und das obwohl er von allen anderen bis dahin einfach übersehen wurde.
Salopp kann man sagen Isomorphie entspricht Isotopie, natürliche Äquivalenz entspricht Homöomorhpie und Adjungiertheit entspricht Homotopie.

Eine lange Liste von Beispielen

Dan Kans Beobachtung kann man an folgendem Beispiel erklären:

Eine lange Liste von Beispielen

Dan Kans Beobachtung kann man an folgendem Beispiel erklären:
Betrachte die Kategorien **GRP** (Gruppen) und **SET** (Mengen).
Diese sind sicher nicht äquivalent

Eine lange Liste von Beispielen

Dan Kans Beobachtung kann man an folgendem Beispiel erklären:
Betrachte die Kategorien **GRP** (Gruppen) und **SET** (Mengen).
Diese sind sicher nicht äquivalent (**SET** hat kein Nullobjekt)

Eine lange Liste von Beispielen

Dan Kans Beobachtung kann man an folgendem Beispiel erklären: Betrachte die Kategorien **GRP** (Gruppen) und **SET** (Mengen). Diese sind sicher nicht äquivalent (**SET** hat kein Nullobjekt), denn es gibt viele Möglichkeiten eine Gruppenstruktur auf einer Menge zu definieren. Aber es gibt eine andere fundamentale Beziehung.

Eine lange Liste von Beispielen

Dan Kans Beobachtung kann man an folgendem Beispiel erklären: Betrachte die Kategorien **GRP** (Gruppen) und **SET** (Mengen). Diese sind sicher nicht äquivalent (**SET** hat kein Nullobjekt), denn es gibt viele Möglichkeiten eine Gruppenstruktur auf einer Menge zu definieren. Aber es gibt eine andere fundamentale Beziehung. Sei $V : \mathbf{GRP} \to \mathbf{SET}$ der Vergissfunktor, d.h. vergiss die Gruppenstruktur. Frage: Gibt es eine Gruppenstruktur für eine Menge so, dass man jede andere mögliche Gruppenstruktur aus dieser gewinnen (faktorisieren) kann?

Eine lange Liste von Beispielen

Dan Kans Beobachtung kann man an folgendem Beispiel erklären: Betrachte die Kategorien **GRP** (Gruppen) und **SET** (Mengen). Diese sind sicher nicht äquivalent (**SET** hat kein Nullobjekt), denn es gibt viele Möglichkeiten eine Gruppenstruktur auf einer Menge zu definieren. Aber es gibt eine andere fundamentale Beziehung. Sei $V: \mathbf{GRP} \to \mathbf{SET}$ der Vergissfunktor, d.h. vergiss die Gruppenstruktur. Frage: Gibt es eine Gruppenstruktur für eine Menge so, dass man jede andere mögliche Gruppenstruktur aus dieser gewinnen (faktorisieren) kann?
In der Tat: die freie Gruppe! Bezeichne F den Funktor, welche einer Menge ihre freie Gruppe zuordnet.

Eine lange Liste von Beispielen

Dann gilt $V \circ F \neq \mathrm{id}$ und $F \circ V \neq \mathrm{id}$.

Eine lange Liste von Beispielen

Dann gilt $V \circ F \neq \mathrm{id}$ und $F \circ V \neq \mathrm{id}$. Aber es gibt die Einheit $\eta\colon \mathrm{id} \to V \circ F$ und die Coeinheit $\varepsilon\colon \mathrm{id} \to F \circ V$ so, dass für alle Abbildungen $f\colon X \to V(G)$ und alle Gruppenhomomorphismen $g\colon F(X) \to G$ eindeutige $f'\colon F(X) \to G$ und $g'\colon X \to U(G)$ so gibt, dass $V(f') \circ \eta = f$ und $\varepsilon \circ F(g') = g$ gilt.

Eine lange Liste von Beispielen

Dann gilt $V \circ F \neq \mathrm{id}$ und $F \circ V \neq \mathrm{id}$. Aber es gibt die Einheit $\eta\colon \mathrm{id} \to V \circ F$ und die Coeinheit $\varepsilon\colon \mathrm{id} \to F \circ V$ so, dass für alle Abbildungen $f\colon X \to V(G)$ und alle Gruppenhomomorphismen $g\colon F(X) \to G$ eindeutige $f'\colon F(X) \to G$ und $g'\colon X \to U(G)$ so gibt, dass $V(f') \circ \eta = f$ und $\varepsilon \circ F(g') = g$ gilt.
Oder anders: F ist die bestmögliche Approximation an eine Inverse zu V. Dies motivierte Dan Kan zu dem Begriff der Adjunktion, d.h. einem Paar von Funktoren F, G zusammen mit Einheit und Coeinheit und natürlichen Isomorphismen zwischen Hom(F-,-) und Hom(-,G-).

Eine lange Liste von Beispielen

Adjunktionen sind überall und sie sind eindeutig bis auf natürliche Isomorphie:

Eine lange Liste von Beispielen

Adjunktionen sind überall und sie sind eindeutig bis auf natürliche Isomorphie:

- "äquivalent" zum Begriff des universellen Objektes/Pfeils, zu den Kan-Erweiterungen, zu darstellbaren Funktoren und Monaden;

Eine lange Liste von Beispielen

Adjunktionen sind überall und sie sind eindeutig bis auf natürliche Isomorphie:

- "äquivalent" zum Begriff des universellen Objektes/Pfeils, zu den Kan-Erweiterungen, zu darstellbaren Funktoren und Monaden;
- Verallgemeinerung des Begriffes Kategorienäquivalenz;

Eine lange Liste von Beispielen

Adjunktionen sind überall und sie sind eindeutig bis auf natürliche Isomorphie:

- "äquivalent" zum Begriff des universellen Objektes/Pfeils, zu den Kan-Erweiterungen, zu darstellbaren Funktoren und Monaden;
- Verallgemeinerung des Begriffes Kategorienäquivalenz;
- freie Funktoren sind links adjungiert zu Vergissfunktoren;

Eine lange Liste von Beispielen

Adjunktionen sind überall und sie sind eindeutig bis auf natürliche Isomorphie:

- "äquivalent" zum Begriff des universellen Objektes/Pfeils, zu den Kan-Erweiterungen, zu darstellbaren Funktoren und Monaden;
- Verallgemeinerung des Begriffes Kategorienäquivalenz;
- freie Funktoren sind links adjungiert zu Vergissfunktoren;
- Tensorprodukte sind links adjungiert zu Hom-Funktoren;

Eine lange Liste von Beispielen

Adjunktionen sind überall und sie sind eindeutig bis auf natürliche Isomorphie:

- "äquivalent" zum Begriff des universellen Objektes/Pfeils, zu den Kan-Erweiterungen, zu darstellbaren Funktoren und Monaden;
- Verallgemeinerung des Begriffes Kategorienäquivalenz;
- freie Funktoren sind links adjungiert zu Vergissfunktoren;
- Tensorprodukte sind links adjungiert zu Hom-Funktoren;
- abelisieren einer Gruppe $G/[G,G]$ ist rechts adjungiert zur Inklusion;

Eine lange Liste von Beispielen

- Suspension eines topologischen Raums X ist links adjungiert zum Schleifenraum von X;

Eine lange Liste von Beispielen

- Suspension eines topologischen Raums X ist links adjungiert zum Schleifenraum von X;
- Stone-Ćech Kompaktifizierung ist rechts adjungiert zur Inklusion;

Eine lange Liste von Beispielen

- Suspension eines topologischen Raums X ist links adjungiert zum Schleifenraum von X;
- Stone-Ćech Kompaktifizierung ist rechts adjungiert zur Inklusion;
- verschiedene Beispiele aus der mathematischen Logik, z.B. Quantoren und Negationen;
- usw.

Eine lange Liste von Beispielen

- Suspension eines topologischen Raums X ist links adjungiert zum Schleifenraum von X;
- Stone-Ćech Kompaktifizierung ist rechts adjungiert zur Inklusion;
- verschiedene Beispiele aus der mathematischen Logik, z.B. Quantoren und Negationen;
- usw.

Deshalb ist es eine zentrale Frage, welche Funktoren Adjungierte haben.

Eigenständigkeit der Kategorientheorie

Der Begriff der adjungierten Funktoren und die zugehörige Liste von Beispielen, die in den folgenden Jahren innerhalb der Algebra, algebraischen Geometrie, Topologie, Graphentheorie und mathematischen Logik gefunden wurden, legte nahe, dass der Begriff Kategorie mehr war als nur ein Werkzeug um einige Phänomene der homologischen Algebra zu verstehen.

Eigenständigkeit der Kategorientheorie

Der Begriff der adjungierten Funktoren und die zugehörige Liste von Beispielen, die in den folgenden Jahren innerhalb der Algebra, algebraischen Geometrie, Topologie, Graphentheorie und mathematischen Logik gefunden wurden, legte nahe, dass der Begriff Kategorie mehr war als nur ein Werkzeug um einige Phänomene der homologischen Algebra zu verstehen.
Einige der wichtigsten Entwicklungen in den folgenden Jahren seien hier hervorzuheben:

Eigenständigkeit der Kategorientheorie

Der Begriff der adjungierten Funktoren und die zugehörige Liste von Beispielen, die in den folgenden Jahren innerhalb der Algebra, algebraischen Geometrie, Topologie, Graphentheorie und mathematischen Logik gefunden wurden, legte nahe, dass der Begriff Kategorie mehr war als nur ein Werkzeug um einige Phänomene der homologischen Algebra zu verstehen.
Einige der wichtigsten Entwicklungen in den folgenden Jahren seien hier hervorzuheben:

- Grothendieck (1957): abelsche Kategorien und K-Theorie;

Eigenständigkeit der Kategorientheorie

Der Begriff der adjungierten Funktoren und die zugehörige Liste von Beispielen, die in den folgenden Jahren innerhalb der Algebra, algebraischen Geometrie, Topologie, Graphentheorie und mathematischen Logik gefunden wurden, legte nahe, dass der Begriff Kategorie mehr war als nur ein Werkzeug um einige Phänomene der homologischen Algebra zu verstehen.
Einige der wichtigsten Entwicklungen in den folgenden Jahren seien hier hervorzuheben:

- Grothendieck (1957): abelsche Kategorien und K-Theorie;
- der Begriff Topos von Grothendieck (1958) - Kategorientheorie als Grundlage der Mathematik;

Eigenständigkeit der Kategorientheorie

Der Begriff der adjungierten Funktoren und die zugehörige Liste von Beispielen, die in den folgenden Jahren innerhalb der Algebra, algebraischen Geometrie, Topologie, Graphentheorie und mathematischen Logik gefunden wurden, legte nahe, dass der Begriff Kategorie mehr war als nur ein Werkzeug um einige Phänomene der homologischen Algebra zu verstehen.
Einige der wichtigsten Entwicklungen in den folgenden Jahren seien hier hervorzuheben:

- Grothendieck (1957): abelsche Kategorien und K-Theorie;
- der Begriff Topos von Grothendieck (1958) - Kategorientheorie als Grundlage der Mathematik;
- algebraische K-Theorie wird 1959 von Serre eingeführt;

Eigenständigkeit der Kategorientheorie

Der Begriff der adjungierten Funktoren und die zugehörige Liste von Beispielen, die in den folgenden Jahren innerhalb der Algebra, algebraischen Geometrie, Topologie, Graphentheorie und mathematischen Logik gefunden wurden, legte nahe, dass der Begriff Kategorie mehr war als nur ein Werkzeug um einige Phänomene der homologischen Algebra zu verstehen.
Einige der wichtigsten Entwicklungen in den folgenden Jahren seien hier hervorzuheben:

- Grothendieck (1957): abelsche Kategorien und K-Theorie;
- der Begriff Topos von Grothendieck (1958) - Kategorientheorie als Grundlage der Mathematik;
- algebraische K-Theorie wird 1959 von Serre eingeführt;
- Kan-Erweiterungen und simpliziale Mengen von Dan Kan (1960);

Eigenständigkeit der Kategorientheorie

- Grothendieck kategorifiziert die Galois Theorie (1960)

Eigenständigkeit der Kategorientheorie

- Grothendieck kategorifiziert die Galois Theorie (1960)
- Lawvere begründet die kategorielle Logik (1963) - Kategorientheorie statt Mengentheorie;

Eigenständigkeit der Kategorientheorie

- Grothendieck kategorifiziert die Galois Theorie (1960)
- Lawvere begründet die kategorielle Logik (1963) - Kategorientheorie statt Mengentheorie;
- Mac Lane prägt den Begriff monoidale Kategorie (1963) - ein Fundament für Tensorprodukte;

Eigenständigkeit der Kategorientheorie

- Grothendieck kategorifiziert die Galois Theorie (1960)
- Lawvere begründet die kategorielle Logik (1963) - Kategorientheorie statt Mengentheorie;
- Mac Lane prägt den Begriff monoidale Kategorie (1963) - ein Fundament für Tensorprodukte;
- Axiomatisierung der Begriffe "Kategorie der Mengen" (1963) und "Kategorie der Kategorien" (1966);

Eigenständigkeit der Kategorientheorie

- Grothendieck kategorifiziert die Galois Theorie (1960)
- Lawvere begründet die kategorielle Logik (1963) - Kategorientheorie statt Mengentheorie;
- Mac Lane prägt den Begriff monoidale Kategorie (1963) - ein Fundament für Tensorprodukte;
- Axiomatisierung der Begriffe "Kategorie der Mengen" (1963) und "Kategorie der Kategorien" (1966);
- strikte 2-Kategorien werden 1965 von Ehrenmann eingeführt und 1967 von Bénabou auf schwache 2-Kategorien verallgemeinert;

Eigenständigkeit der Kategorientheorie

- Lambek benutzt den Begriff Multikategorie (1968);

Eigenständigkeit der Kategorientheorie

- Lambek benutzt den Begriff Multikategorie (1968);
- Lawvere und Tierney gründen die "Theorie der Universen" (1970);

Eigenständigkeit der Kategorientheorie

- Lambek benutzt den Begriff Multikategorie (1968);
- Lawvere und Tierney gründen die "Theorie der Universen" (1970);
- Mac Lanes Buch „Categories for the working mathematician“ erscheint 1971 und wird das Standardwerk.

Eigenständigkeit der Kategorientheorie

- Lambek benutzt den Begriff Multikategorie (1968);
- Lawvere und Tierney gründen die "Theorie der Universen" (1970);
- Mac Lanes Buch „Categories for the working mathematician“ erscheint 1971 und wird das Standardwerk.

Spätestens ab 1971 ist die Kategorientheorie zu einem eigenständigen Gebiet gewachsen.

Eigenständigkeit der Kategorientheorie

- Lambek benutzt den Begriff Multikategorie (1968);
- Lawvere und Tierney gründen die "Theorie der Universen" (1970);
- Mac Lanes Buch „Categories for the working mathematician" erscheint 1971 und wird das Standardwerk.

Spätestens ab 1971 ist die Kategorientheorie zu einem eigenständigen Gebiet gewachsen. Bis heute wird seitdem das Prinzip der Kategorifizierung konsequent fortgesetzt.

Eigenständigkeit der Kategorientheorie

- Lambek benutzt den Begriff Multikategorie (1968);
- Lawvere und Tierney gründen die "Theorie der Universen" (1970);
- Mac Lanes Buch „Categories for the working mathematician“ erscheint 1971 und wird das Standardwerk.

Spätestens ab 1971 ist die Kategorientheorie zu einem eigenständigen Gebiet gewachsen. Bis heute wird seitdem das Prinzip der Kategorifizierung konsequent fortgesetzt.
Heute kann man sie als Landkarte (wie auf dem Titelbild) bezeichnen: sie enthüllt verborgene Beziehungen scheinbar unterschiedlicher Gebiete - von der Physik bis zur mathematischen Logik.

Eigenständigkeit der Kategorientheorie

- Lambek benutzt den Begriff Multikategorie (1968);
- Lawvere und Tierney gründen die "Theorie der Universen" (1970);
- Mac Lanes Buch „Categories for the working mathematician“ erscheint 1971 und wird das Standardwerk.

Spätestens ab 1971 ist die Kategorientheorie zu einem eigenständigen Gebiet gewachsen. Bis heute wird seitdem das Prinzip der Kategorifizierung konsequent fortgesetzt.
Heute kann man sie als Landkarte (wie auf dem Titelbild) bezeichnen: sie enthüllt verborgene Beziehungen scheinbar unterschiedlicher Gebiete - von der Physik bis zur mathematischen Logik.
Eine interessante Verbindung wollen wir im Folgenden Abschnitt beleuchten.

Monoidale Kategorien

In seinem einflussreichen Artikel „Natural associativity and commutativity" (1963) führte Saunders Mac Lane den Begriff der monoidalen Kategorie ein. Die Idee dabei war die von ihm gemachte Beobachtung:

Monoidale Kategorien

In seinem einflussreichen Artikel „Natural associativity and commutativity" (1963) führte Saunders Mac Lane den Begriff der monoidalen Kategorie ein. Die Idee dabei war die von ihm gemachte Beobachtung:
Falls U, V, W drei K-Vektorräume sind, so sagen eigentlich alle Mathematiker, dass

$$V \otimes W = W \otimes V; \ (U \otimes V) \otimes W = U \otimes (V \otimes W); \ K \otimes V = V = V \otimes K$$

gilt, obwohl dies nur bis auf natürliche Isomorphie gilt.

Monoidale Kategorien

In seinem einflussreichen Artikel „Natural associativity and commutativity“ (1963) führte Saunders Mac Lane den Begriff der monoidalen Kategorie ein. Die Idee dabei war die von ihm gemachte Beobachtung:
Falls U, V, W drei K-Vektorräume sind, so sagen eigentlich alle Mathematiker, dass

$$V \otimes W = W \otimes V; \ (U \otimes V) \otimes W = U \otimes (V \otimes W); \ K \otimes V = V = V \otimes K$$

gilt, obwohl dies nur bis auf natürliche Isomorphie gilt.
Er erkannte, dass es sich dabei um ein fundamentales Konzept der Kategorientheorie handelte, nämlich, dass (fast) alle Begriffe nur bis auf eine Art natürliche Isomorphie gültig sind.

Monoidale Kategorien

In seinem einflussreichen Artikel „Natural associativity and commutativity“ (1963) führte Saunders Mac Lane den Begriff der monoidalen Kategorie ein. Die Idee dabei war die von ihm gemachte Beobachtung:
Falls U, V, W drei K-Vektorräume sind, so sagen eigentlich alle Mathematiker, dass

$$V \otimes W = W \otimes V; \ (U \otimes V) \otimes W = U \otimes (V \otimes W); \ K \otimes V = V = V \otimes K$$

gilt, obwohl dies nur bis auf natürliche Isomorphie gilt.
Er erkannte, dass es sich dabei um ein fundamentales Konzept der Kategorientheorie handelte, nämlich, dass (fast) alle Begriffe nur bis auf eine Art natürliche Isomorphie gültig sind. Dies motivierte ihn den Begriff des Tensorproduktes auf allgemeine Kategorien (und damit weit über Vektorräume hinaus) zu übertragen. Der Begriff der monoidalen Kategorie war geboren.

Monoidale Kategorien

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einem Funktor, genannt Tensorprodukt, $\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Er fixierte vier Klassen natürlicher Isomorphismen und ein Objekt 1. Seien x, y, z Objekte von $\mathcal{C}$.

Monoidale Kategorien

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einem Funktor, genannt Tensorprodukt, $\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Er fixierte vier Klassen natürlicher Isomorphismen und ein Objekt 1. Seien x, y, z Objekte von $\mathcal{C}$.

- linke und rechte Einheit $l_x\colon 1 \otimes x \to x$ und $r_x\colon x \otimes 1 \to x$;

Monoidale Kategorien

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einem Funktor, genannt Tensorprodukt, $\otimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Er fixierte vier Klassen natürlicher Isomorphismen und ein Objekt 1. Seien x, y, z Objekte von $\mathcal{C}$.

- linke und rechte Einheit $l_x \colon 1 \otimes x \to x$ und $r_x \colon x \otimes 1 \to x$;
- Assoziator $a_{x,y,z} \colon x \otimes (y \otimes z) \to (x \otimes y) \otimes z$ und den Zopf $B_{x,y} \colon x \otimes y \to y \otimes x$.

Monoidale Kategorien

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einem Funktor, genannt Tensorprodukt, $\otimes\colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Er fixierte vier Klassen natürlicher Isomorphismen und ein Objekt 1. Seien x, y, z Objekte von $\mathcal{C}$.

- linke und rechte Einheit $l_x\colon 1 \otimes x \to x$ und $r_x\colon x \otimes 1 \to x$;
- Assoziator $a_{x,y,z}\colon x \otimes (y \otimes z) \to (x \otimes y) \otimes z$ und den Zopf $B_{x,y}\colon x \otimes y \to y \otimes x$.

Zusammen mit noch einigen Axiomen, von denen hier nur $B_{x,y}B_{y,x} = 1$ erwähnt werden soll, formt dieser Input eine monoidale Kategorie. Er nannte sie strikt, falls alle fixierten natürlichen Isomorphismen sogar die Identität sind.

Monoidale Kategorien

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit einem Funktor, genannt Tensorprodukt, $\otimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Er fixierte vier Klassen natürlicher Isomorphismen und ein Objekt 1. Seien x, y, z Objekte von $\mathcal{C}$.

- linke und rechte Einheit $l_x \colon 1 \otimes x \to x$ und $r_x \colon x \otimes 1 \to x$;
- Assoziator $a_{x,y,z} \colon x \otimes (y \otimes z) \to (x \otimes y) \otimes z$ und den Zopf $B_{x,y} \colon x \otimes y \to y \otimes x$.

Zusammen mit noch einigen Axiomen, von denen hier nur $B_{x,y} B_{y,x} = 1$ erwähnt werden soll, formt dieser Input eine monoidale Kategorie. Er nannte sie strikt, falls alle fixierten natürlichen Isomorphismen sogar die Identität sind.
Er bewies das folgende Theorem, welches eine Rechtfertigung für die Nachlässigkeit der Mathematiker ist.

Monoidale Kategorien

Mac Lanes Koherenztheorem

Jede monoidale Kategorie ist monoidal äquivalent zu einer strikt monoidalen Kategorie.

Monoidale Kategorien

Mac Lanes Koherenztheorem

Jede monoidale Kategorie ist monoidal äquivalent zu einer strikt monoidalen Kategorie.

Das ist der Grund, warum man schlampig $K \otimes V = V = V \otimes K$ usw. schreiben kann, denn die nicht strikte Kategorie der K-Vektorräume ist äquivalent zu einer strikten.

Monoidale Kategorien

Mac Lanes Koherenztheorem

Jede monoidale Kategorie ist monoidal äquivalent zu einer strikt monoidalen Kategorie.

Das ist der Grund, warum man schlampig $K \otimes V = V = V \otimes K$ usw. schreiben kann, denn die nicht strikte Kategorie der K-Vektorräume ist äquivalent zu einer strikten.
Tatsächliche sind fast alle "praktischen" Beispiele von monoidalen Kategorien nicht strikt, aber das Theorem erlaubt es uns sie als strikt anzusehen.

Monoidale Kategorien

Mac Lanes Koherenztheorem

Jede monoidale Kategorie ist monoidal äquivalent zu einer strikt monoidalen Kategorie.

Das ist der Grund, warum man schlampig $K \otimes V = V = V \otimes K$ usw. schreiben kann, denn die nicht strikte Kategorie der K-Vektorräume ist äquivalent zu einer strikten.
Tatsächliche sind fast alle "praktischen" Beispiele von monoidalen Kategorien nicht strikt, aber das Theorem erlaubt es uns sie als strikt anzusehen. Damit hat die Kategorientheorie durch Abstraktion eine Erklärung geliefert, warum wir so oft guten Gewissens Klammern weglassen dürfen.

Monoidale Kategorien

Mac Lanes Koherenztheorem

Jede monoidale Kategorie ist monoidal äquivalent zu einer strikt monoidalen Kategorie.

Das ist der Grund, warum man schlampig $K \otimes V = V = V \otimes K$ usw. schreiben kann, denn die nicht strikte Kategorie der K-Vektorräume ist äquivalent zu einer strikten.
Tatsächliche sind fast alle "praktischen" Beispiele von monoidalen Kategorien nicht strikt, aber das Theorem erlaubt es uns sie als strikt anzusehen. Damit hat die Kategorientheorie durch Abstraktion eine Erklärung geliefert, warum wir so oft guten Gewissens Klammern weglassen dürfen.
Allerdings gibt es auch ein Problem mit seiner Erkenntnis:

Monoidale Kategorien

Mac Lanes Koherenztheorem

Jede monoidale Kategorie ist monoidal äquivalent zu einer strikt monoidalen Kategorie.

Das ist der Grund, warum man schlampig $K \otimes V = V = V \otimes K$ usw. schreiben kann, denn die nicht strikte Kategorie der K-Vektorräume ist äquivalent zu einer strikten.
Tatsächliche sind fast alle "praktischen" Beispiele von monoidalen Kategorien nicht strikt, aber das Theorem erlaubt es uns sie als strikt anzusehen. Damit hat die Kategorientheorie durch Abstraktion eine Erklärung geliefert, warum wir so oft guten Gewissens Klammern weglassen dürfen.
Allerdings gibt es auch ein Problem mit seiner Erkenntnis: Bereits der Ring der Matrizen zeigt, dass Kommutativität nicht so natürlich ist wie Assoziativität.

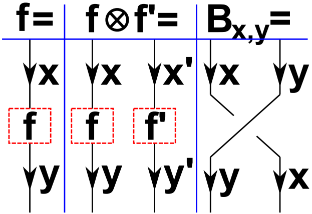
Zöpfe und Kategorientheorie

Es entstand im Laufe der Jahre (hierbei ist es schwer einen speziellen Entdecker zu nennen) ein graphisches Kalkül, welches diesen Effekt beschreibt:

Zöpfe und Kategorientheorie

Es entstand im Laufe der Jahre (hierbei ist es schwer einen speziellen Entdecker zu nennen) ein graphisches Kalkül, welches diesen Effekt beschreibt:

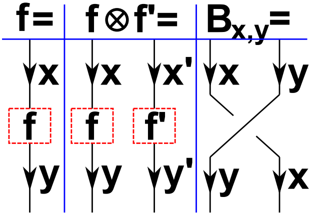
Wenn wir $f : x \to y$ als eine vertikale zeitliche Entwicklung und $f \otimes f' : x \otimes x' \to y \otimes y'$ durch horizontale Platzierung darstellen, so können wir den Zopf $B_{x,y}$ wie rechts darstellen.



Zöpfe und Kategorientheorie

Es entstand im Laufe der Jahre (hierbei ist es schwer einen speziellen Entdecker zu nennen) ein graphisches Kalkül, welches diesen Effekt beschreibt:

Wenn wir $f: x \to y$ als eine vertikale zeitliche Entwicklung und $f \otimes f': x \otimes x' \to y \otimes y'$ durch horizontale Platzierung darstellen, so können wir den Zopf $B_{x,y}$ wie rechts darstellen.



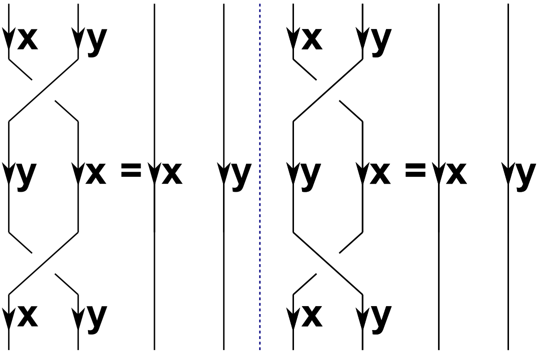
Damit sieht man, dass monoidale Kategorien im Gegensatz zu "normalen" Kategorien eine zweidimensionale Struktur haben, die horizontale (Standard-) und vertikale (Tensor-) Verknüpfung.

Zöpfe und Kategorientheorie

So sieht man leicht die Unnatürlichkeit von Saunders Mac Lanes Konstruktion ein. Sie würde nämlich folgende Identität beinhalten.

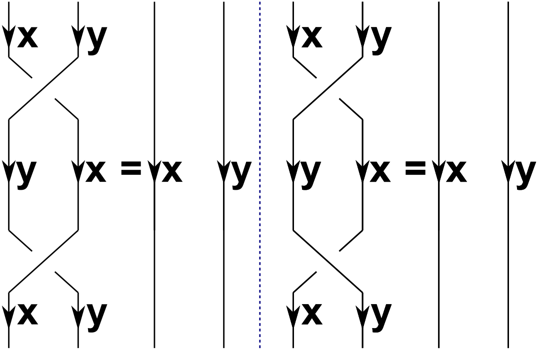
Zöpfe und Kategorientheorie

So sieht man leicht die Unnatürlichkeit von Saunders Mac Lanes Konstruktion ein. Sie würde nämlich folgende Identität beinhalten.



Zöpfe und Kategorientheorie

So sieht man leicht die Unnatürlichkeit von Saunders Mac Lanes Konstruktion ein. Sie würde nämlich folgende Identität beinhalten.



Linke Gleichung ist in drei Dimensionen im Allgemeinen falsch, da sie zur Trivialität aller Knoten führen würde.

Zöpfe und Kategorientheorie

Man bezeichnet eine Kategorie, welche nur die rechte Gleichung erfüllt als verzopft.

Zöpfe und Kategorientheorie

Man bezeichnet eine Kategorie, welche nur die rechte Gleichung erfüllt als verzopft. Ist auch die linke Gleichung erfüllt, so sagt man sie ist symmetrisch. Damit kann man beweisen:

Zöpfe und Kategorientheorie

Man bezeichnet eine Kategorie, welche nur die rechte Gleichung erfüllt als verzopft. Ist auch die linke Gleichung erfüllt, so sagt man sie ist symmetrisch. Damit kann man beweisen:

Mac Lanes Koherenztheorem - Teil 2

Jede (symmetrisch) monoidale Kategorie ist monoidal äquivalent zu einer strikt (symmetrisch) monoidalen,

Zöpfe und Kategorientheorie

Man bezeichnet eine Kategorie, welche nur die rechte Gleichung erfüllt als verzopft. Ist auch die linke Gleichung erfüllt, so sagt man sie ist symmetrisch. Damit kann man beweisen:

Mac Lanes Koherenztheorem - Teil 2

Jede (symmetrisch) monoidale Kategorie ist monoidal äquivalent zu einer strikt (symmetrisch) monoidalen, aber nicht jede zu einer symmetrischen.

Zöpfe und Kategorientheorie

Man bezeichnet eine Kategorie, welche nur die rechte Gleichung erfüllt als verzopft. Ist auch die linke Gleichung erfüllt, so sagt man sie ist symmetrisch. Damit kann man beweisen:

Mac Lanes Koherenztheorem - Teil 2

Jede (symmetrisch) monoidale Kategorie ist monoidal äquivalent zu einer strikt (symmetrisch) monoidalen, aber nicht jede zu einer symmetrischen.

Solche verzopften Kategorien werden heutzutage z.B. zum Studium von 3-Mannigfalltigskeitsinvarianten (via Kirby-Kalkül), Quantengruppe (via Yang-Baxter-Gleichung) und in der theoretischen Physik (via Quantengruppen) verwendet.

Zöpfe und Kategorientheorie

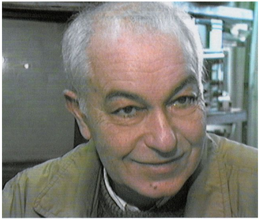
Man bezeichnet eine Kategorie, welche nur die rechte Gleichung erfüllt als verzopft. Ist auch die linke Gleichung erfüllt, so sagt man sie ist symmetrisch. Damit kann man beweisen:

Mac Lanes Koherenztheorem - Teil 2

Jede (symmetrisch) monoidale Kategorie ist monoidal äquivalent zu einer strikt (symmetrisch) monoidalen, aber nicht jede zu einer symmetrischen.

Solche verzopften Kategorien werden heutzutage z.B. zum Studium von 3-Mannigfalltigskeitsinvarianten (via Kirby-Kalkül), Quantengruppe (via Yang-Baxter-Gleichung) und in der theoretischen Physik (via Quantengruppen) verwendet.
Das genaue Studium von kategoriellen Strukturen hat sich wieder mal als nützlich erwiesen.

2-Kategorien



Jean Bénabou
(03.06.1932-ongoing)

Jean Bénabou (1967)

Die monoidalen Kategorien sind zweidimensional, aber eigentlich fast nie strikt.
Also sollte die zweidimensionale Verknüpfung nur bis auf 2-Isomorphie eindeutig sein.

2-Kategorien

Die zweidimensionale Struktur von monoidalen Kategorien bemerkte Jean Bénabou in „Introduction to Bicategories“ (1967) und definierte was er Bikategorie nannte (heute eher als schwache 2-Kategorie bezeichnet).

2-Kategorien

Die zweidimensionale Struktur von monoidalen Kategorien bemerkte Jean Bénabou in „Introduction to Bicategories“ (1967) und definierte was er Bikategorie nannte (heute eher als schwache 2-Kategorie bezeichnet).
Die Idee ist es die Beobachtung der Kategorientheorie, dass Morphismen interessanter sind als Objekte, auszubauen.

2-Kategorien

Die zweidimensionale Struktur von monoidalen Kategorien bemerkte Jean Bénabou in „Introduction to Bicategories“ (1967) und definierte was er Bikategorie nannte (heute eher als schwache 2-Kategorie bezeichnet).

Die Idee ist es die Beobachtung der Kategorientheorie, dass Morphismen interessanter sind als Objekte, auszubauen. Er definierte deswegen die 2-Morphismen, also Morphismen zwischen Morphismen. Genauer:

2-Kategorien

Die zweidimensionale Struktur von monoidalen Kategorien bemerkte Jean Bénabou in „Introduction to Bicategories“ (1967) und definierte was er Bikategorie nannte (heute eher als schwache 2-Kategorie bezeichnet).

Die Idee ist es die Beobachtung der Kategorientheorie, dass Morphismen interessanter sind als Objekte, auszubauen. Er definierte deswegen die 2-Morphismen, also Morphismen zwischen Morphismen. Genauer:

Objekte	1-Morphismen	2-Morphismen
$x\bullet$	$x\bullet \xrightarrow{f} \bullet y$	$\begin{tikzcd} x\bullet \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & \bullet y \end{tikzcd}$

2-Kategorien

Die Verknüpfung ist für 1-Morphismen wie in normalen Kategorien. Für die 2-Morphismen definierte er angelehnt an die Beobachtung von Saunders Mac Lane eine horizontale und eine vertikale Verknüpfung (zusammen mit einigen Axiomen):

2-Kategorien

Die Verknüpfung ist für 1-Morphismen wie in normalen Kategorien. Für die 2-Morphismen definierte er angelehnt an die Beobachtung von Saunders Mac Lane eine horizontale und eine vertikale Verknüpfung (zusammen mit einigen Axiomen):

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, "g"] \arrow[r, bend right=60, "h"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\beta"] & y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, bend right=60, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & y \arrow[r, bend left=60, "h"] \arrow[r, bend right=60, "j"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & z \end{tikzcd}$$

2-Kategorien

Die Verknüpfung ist für 1-Morphismen wie in normalen Kategorien. Für die 2-Morphismen definierte er angelehnt an die Beobachtung von Saunders Mac Lane eine horizontale und eine vertikale Verknüpfung (zusammen mit einigen Axiomen):

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=60, "f"{name=F}] \arrow[r, "g"{name=G}] \arrow[r, bend right=60, "h"'{name=H}] \arrow[from=F, to=G, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[from=G, to=H, phantom, "\Downarrow\beta"] & y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, bend right=50, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & y \arrow[r, bend left=50, "h"] \arrow[r, bend right=50, "j"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & z
\end{tikzcd}
$$

Damit wird noch deutlicher, dass man sich Kategorien bildlich gut vorstellen kann.

2-Kategorien

Die Verknüpfung ist für 1-Morphismen wie in normalen Kategorien. Für die 2-Morphismen definierte er angelehnt an die Beobachtung von Saunders Mac Lane eine horizontale und eine vertikale Verknüpfung (zusammen mit einigen Axiomen):

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, "g" description] \arrow[r, bend right=60, "h"'] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, bend right=30, "\Downarrow\beta"] & y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, bend right=50, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & y \arrow[r, bend left=50, "h"] \arrow[r, bend right=50, "j"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & z
\end{tikzcd}
$$

Damit wird noch deutlicher, dass man sich Kategorien bildlich gut vorstellen kann. Haben normale Kategorien eine kombinatorische Struktur, so haben 2-Kategorien sogar eine topologische Struktur.

Beispiele

Zwar ist jede Kategorie eine 2-Kategorie (ohne 2-Morphismen)

Beispiele

Zwar ist jede Kategorie eine 2-Kategorie (ohne 2-Morphismen) und auch die "Kategorie der Kategorien" mit Kategorien als 0-Zellen, Funktoren als 1-Zellen und natürlichen Transformationen als 2-Zellen,

Beispiele

Zwar ist jede Kategorie eine 2-Kategorie (ohne 2-Morphismen) und auch die "Kategorie der Kategorien" mit Kategorien als 0-Zellen, Funktoren als 1-Zellen und natürlichen Transformationen als 2-Zellen, aber dies sind keine guten Beispiele.

Beispiele

Zwar ist jede Kategorie eine 2-Kategorie (ohne 2-Morphismen) und auch die "Kategorie der Kategorien" mit Kategorien als 0-Zellen, Funktoren als 1-Zellen und natürlichen Transformationen als 2-Zellen, aber dies sind keine guten Beispiele.
Eins von den wichtigsten Axiomen ist es, dass Einheit und Assoziativität der Verknüpfung nur bis auf spezielle 2-Isomorphismen gelten müssen.

Beispiele

Zwar ist jede Kategorie eine 2-Kategorie (ohne 2-Morphismen) und auch die "Kategorie der Kategorien" mit Kategorien als 0-Zellen, Funktoren als 1-Zellen und natürlichen Transformationen als 2-Zellen, aber dies sind keine guten Beispiele.
Eins von den wichtigsten Axiomen ist es, dass Einheit und Assoziativität der Verknüpfung nur bis auf spezielle 2-Isomorphismen gelten müssen.
Der Assoziator $a_{x,y,z} \colon x \otimes (y \otimes z) \to (x \otimes y) \otimes z$ in monoidalen Kategorien ist ein Beispiel.

Beispiele

Zwar ist jede Kategorie eine 2-Kategorie (ohne 2-Morphismen) und auch die "Kategorie der Kategorien" mit Kategorien als 0-Zellen, Funktoren als 1-Zellen und natürlichen Transformationen als 2-Zellen, aber dies sind keine guten Beispiele.
Eins von den wichtigsten Axiomen ist es, dass Einheit und Assoziativität der Verknüpfung nur bis auf spezielle 2-Isomorphismen gelten müssen.
Der Assoziator $a_{x,y,z} : x \otimes (y \otimes z) \to (x \otimes y) \otimes z$ in monoidalen Kategorien ist ein Beispiel.
Aber genannte Beispiele erfüllen Einheit und Assoziativität direkt - dies passiert eigentlich selten.
Schauen wir uns deshalb ein schöneres Beispiel an, nämlich **BiMOD**.

Beispiele

Die 2-Kategorie **BiMOD** hat Ringe $R, S, \ldots$ als 0-Zellen,

Beispiele

Die 2-Kategorie **BiMOD** hat Ringe $R, S, \ldots$ als 0-Zellen,
$R - S$-Bimodule ${}_RM_S, {}_RN_S, \ldots$ als 1-Zellen und

Beispiele

Die 2-Kategorie **BiMOD** hat Ringe $R, S, \ldots$ als 0-Zellen, $R-S$-Bimodule ${}_RM_S, {}_RN_S, \ldots$ als 1-Zellen und Bimodulhomomorphismen $f, g, \ldots : {}_RM_S \to {}_RN_S$ als 2-Zellen.

Beispiele

Die 2-Kategorie **BiMOD** hat Ringe $R, S, \ldots$ als 0-Zellen,
$R - S$-Bimodule ${}_RM_S, {}_RN_S, \ldots$ als 1-Zellen und
Bimodulhomomorphismen $f, g, \ldots : {}_RM_S \to {}_RN_S$ als 2-Zellen.
Was sind die Verknüpfungen?

Beispiele

Die 2-Kategorie **BiMOD** hat Ringe $R, S, \dots$ als 0-Zellen,
$R - S$-Bimodule ${}_RM_S, {}_RN_S, \dots$ als 1-Zellen und
Bimodulhomomorphismen $f, g, \dots : {}_RM_S \to {}_RN_S$ als 2-Zellen.
Was sind die Verknüpfungen? Tensorieren für die 1-Zellen

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "{}_RM_S"] \arrow[rr, bend right, "{}_RM_S \otimes_S {}_SM_T"'] & S \arrow[r, "{}_SM_T"] & T \end{tikzcd}$$

Beispiele

Die 2-Kategorie **BiMOD** hat Ringe $R, S, \ldots$ als 0-Zellen, $R - S$-Bimodule ${}_RM_S, {}_RN_S, \ldots$ als 1-Zellen und Bimodulhomomorphismen $f, g, \ldots : {}_RM_S \to {}_RN_S$ als 2-Zellen. Was sind die Verknüpfungen? Tensorieren für die 1-Zellen

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "{}_RM_S"] \arrow[rr, bend right=10, "{}_RM_S \otimes_S {}_SM_T"'] & S \arrow[r, "{}_SM_T"] & T \end{tikzcd}$$

normale Komposition (vertikal) und ebenfalls Tensorieren (horizontal) für 2-Morphismen.

Beispiele

Die 2-Kategorie **BiMOD** hat Ringe $R, S, \ldots$ als 0-Zellen, $R-S$-Bimodule ${}_RM_S, {}_RN_S, \ldots$ als 1-Zellen und Bimodulhomomorphismen $f, g, \ldots : {}_RM_S \to {}_RN_S$ als 2-Zellen.
Was sind die Verknüpfungen? Tensorieren für die 1-Zellen

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "{}_RM_S"] \arrow[rr, bend right, "{}_RM_S \otimes_S {}_SM_T"'] & S \arrow[r, "{}_SM_T"] & T \end{tikzcd}$$

normale Komposition (vertikal) und ebenfalls Tensorieren (horizontal) für 2-Morphismen.
Hier gelten Einheit und Assoziativität nur bis auf Isomorphie.

Beispiele

Dieses Beispiel inspirierte Jean Bénabou zu folgender Beobachtung:

Beispiele

Dieses Beispiel inspirierte Jean Bénabou zu folgender Beobachtung:
1-Kategorien mit einem Objekt sind wie die Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$
Monoide und

Beispiele

Dieses Beispiel inspirierte Jean Bénabou zu folgender Beobachtung: 1-Kategorien mit einem Objekt sind wie die Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ Monoide und 2-Kategorien mit einem Objekt sind monoidale Kategorien.

Beispiele

Dieses Beispiel inspirierte Jean Bénabou zu folgender Beobachtung: 1-Kategorien mit einem Objekt sind wie die Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ Monoide und 2-Kategorien mit einem Objekt sind monoidale Kategorien.
Für das Beispiel der 2-Kategorie **BiMOD** ergibt sich also, dass sie jede Kategorie der R-Module, also für alle Ringe R, als Unterkategorie enthält!

Beispiele

Dieses Beispiel inspirierte Jean Bénabou zu folgender Beobachtung: 1-Kategorien mit einem Objekt sind wie die Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ Monoide und 2-Kategorien mit einem Objekt sind monoidale Kategorien.
Für das Beispiel der 2-Kategorie **BiMOD** ergibt sich also, dass sie jede Kategorie der R-Module, also für alle Ringe R, als Unterkategorie enthält!
Dazu fixiert man einfach einen festen Ring R.

Beispiele

Dieses Beispiel inspirierte Jean Bénabou zu folgender Beobachtung: 1-Kategorien mit einem Objekt sind wie die Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ Monoide und 2-Kategorien mit einem Objekt sind monoidale Kategorien.
Für das Beispiel der 2-Kategorie **BiMOD** ergibt sich also, dass sie jede Kategorie der R-Module, also für alle Ringe R, als Unterkategorie enthält!
Dazu fixiert man einfach einen festen Ring R. Mit Jean Bénabous Beobachtung kriegt man sogar das Tensorprodukt $\otimes_R$ geschenkt.

Beispiele

Dieses Beispiel inspirierte Jean Bénabou zu folgender Beobachtung: 1-Kategorien mit einem Objekt sind wie die Natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ Monoide und 2-Kategorien mit einem Objekt sind monoidale Kategorien.
Für das Beispiel der 2-Kategorie **BiMOD** ergibt sich also, dass sie jede Kategorie der R-Module, also für alle Ringe R, als Unterkategorie enthält!
Dazu fixiert man einfach einen festen Ring R. Mit Jean Bénabous Beobachtung kriegt man sogar das Tensorprodukt $\otimes_R$ geschenkt.
Deswegen wurden 2-Kategorien in den folgenden Jahren bis heute intensiv studiert.

Grothendiecks Traum

Alexandre Grothendieck
(28.03.1928-ongoing)

Grothendiecks Traum (1983)

Sei X ein topologischer Raum. Dann gibt es ein Kategorie $\prod_\omega(X)$, genannt Fundamentaler ω-Groupoid, welcher eine vollständige Invariante des Homotopietyps von X ist.

n-Kategorien

In Jahr 1983 schrieb Alexandre Grothendieck einen ca. 600 seitigen Brief an seinen Freund Daniel Quillen, in welchem er, inspiriert von den Überlegungen von Jean Bénabou, den Begriff der n-Kategorie und der ω-Kategorie benutzte.

n-Kategorien

In Jahr 1983 schrieb Alexandre Grothendieck einen ca. 600 seitigen Brief an seinen Freund Daniel Quillen, in welchem er, inspiriert von den Überlegungen von Jean Bénabou, den Begriff der n-Kategorie und der ω-Kategorie benutzte.
In seiner Vorstellung sollten n-Kategorien ein n-dimensionales Analogon zu den bereits etablierten 2-Kategorien sein.

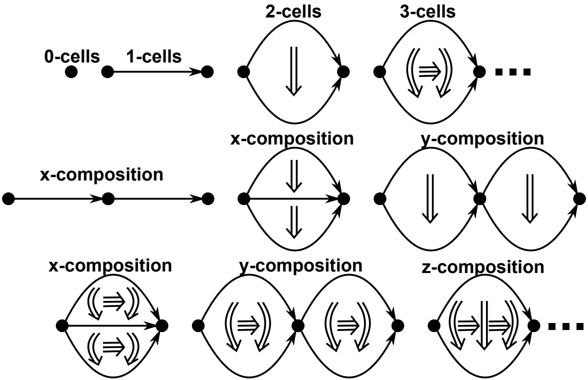
n-Kategorien

In Jahr 1983 schrieb Alexandre Grothendieck einen ca. 600 seitigen Brief an seinen Freund Daniel Quillen, in welchem er, inspiriert von den Überlegungen von Jean Bénabou, den Begriff der n-Kategorie und der ω-Kategorie benutzte.
In seiner Vorstellung sollten n-Kategorien ein n-dimensionales Analogon zu den bereits etablierten 2-Kategorien sein.
Eine n-Kategorie in seinem Sinne sollte n-Zellen enthalten, wobei die n-Zellen immer zwischen den $n-1$-Zellen verlaufen und eine n verschiedene Verknüpfungen haben.

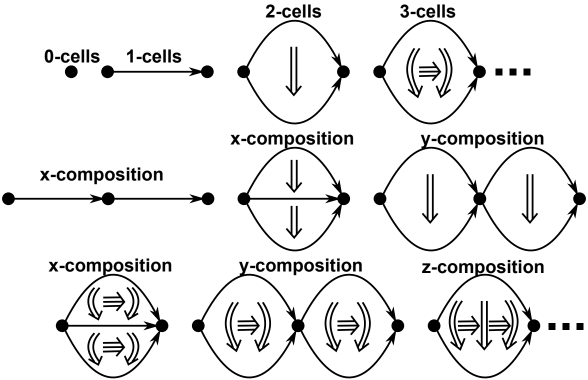
n-Kategorien

In Jahr 1983 schrieb Alexandre Grothendieck einen ca. 600 seitigen Brief an seinen Freund Daniel Quillen, in welchem er, inspiriert von den Überlegungen von Jean Bénabou, den Begriff der n-Kategorie und der ω-Kategorie benutzte.
In seiner Vorstellung sollten n-Kategorien ein n-dimensionales Analogon zu den bereits etablierten 2-Kategorien sein.
Eine n-Kategorie in seinem Sinne sollte n-Zellen enthalten, wobei die n-Zellen immer zwischen den $n-1$-Zellen verlaufen und eine n verschiedene Verknüpfungen haben.
Damit ergibt sich folgendes Bild:

n-Kategorien



n-Kategorien



Hierbei ist wieder alles nur bis auf eine gewisse Art von n-Isomorphie definiert. Allerdings gibt es bis heute keinen eindeutigen Ansatz für die Definition, d.h. es gibt mehrere Ansätze, von denen sich noch keiner durchgesetzt hat.

Grothendiecks Beispiel

Alexandre Grothendieck beschrieb ein Beispiel einer Kategorie, welche er ω-Kategorie nannte. Das ist eine Kategorie, welche für jedes $n \in \omega$ die n-Zellen enthält.

Grothendiecks Beispiel

Alexandre Grothendieck beschrieb ein Beispiel einer Kategorie, welche er ω-Kategorie nannte. Das ist eine Kategorie, welche für jedes $n \in \omega$ die n-Zellen enthält. Sei X ein topologischer Raum. Sein Beispiel war die ω-Kategorie $\prod_{\omega}(X)$. Sie hat:

Grothendiecks Beispiel

Alexandre Grothendieck beschrieb ein Beispiel einer Kategorie, welche er ω-Kategorie nannte. Das ist eine Kategorie, welche für jedes $n \in \omega$ die n-Zellen enthält. Sei X ein topologischer Raum. Sein Beispiel war die ω-Kategorie $\prod_\omega(X)$. Sie hat:

- Punkte $x \in X$ als 0-Zellen;

Grothendiecks Beispiel

Alexandre Grothendieck beschrieb ein Beispiel einer Kategorie, welche er ω-Kategorie nannte. Das ist eine Kategorie, welche für jedes $n \in \omega$ die n-Zellen enthält. Sei X ein topologischer Raum. Sein Beispiel war die ω-Kategorie $\prod_\omega(X)$. Sie hat:

- Punkte $x \in X$ als 0-Zellen;
- Wege $w\colon [0,1] \to X$ als 1-Zellen;

Grothendiecks Beispiel

Alexandre Grothendieck beschrieb ein Beispiel einer Kategorie, welche er ω-Kategorie nannte. Das ist eine Kategorie, welche für jedes $n \in \omega$ die n-Zellen enthält. Sei X ein topologischer Raum. Sein Beispiel war die ω-Kategorie $\prod_\omega(X)$. Sie hat:

- Punkte $x \in X$ als 0-Zellen;
- Wege $w\colon [0,1] \to X$ als 1-Zellen;
- Homotopien von Wegen $[0,1]^2 \to X$ als 2-Zellen;

Grothendiecks Beispiel

Alexandre Grothendieck beschrieb ein Beispiel einer Kategorie, welche er ω-Kategorie nannte. Das ist eine Kategorie, welche für jedes $n \in \omega$ die n-Zellen enthält. Sei X ein topologischer Raum. Sein Beispiel war die ω-Kategorie $\prod_\omega(X)$. Sie hat:

- Punkte $x \in X$ als 0-Zellen;
- Wege $w\colon [0,1] \to X$ als 1-Zellen;
- Homotopien von Wegen $[0,1]^2 \to X$ als 2-Zellen;
- Homotopien von Homotopien von Wegen $[0,1]^3 \to X$ als 3-Zellen usw.

Grothendiecks Beispiel

Alexandre Grothendieck beschrieb ein Beispiel einer Kategorie, welche er ω-Kategorie nannte. Das ist eine Kategorie, welche für jedes $n \in \omega$ die n-Zellen enthält. Sei X ein topologischer Raum. Sein Beispiel war die ω-Kategorie $\prod_\omega(X)$. Sie hat:

- Punkte $x \in X$ als 0-Zellen;
- Wege $w\colon [0,1] \to X$ als 1-Zellen;
- Homotopien von Wegen $[0,1]^2 \to X$ als 2-Zellen;
- Homotopien von Homotopien von Wegen $[0,1]^3 \to X$ als 3-Zellen usw.

Komposition ist Verknüpfen von Wegen bzw. Homotopien. Da damit alle $n > 0$-Zellen Isomorphismen sind, nannte er $\prod_\omega(X)$ den Fundamentalen ω-Groupoid. Es ist z.B. $\prod_1(X)$ der klassische Fundamental Groupoid.

Grothendiecks Beispiel

Alexandre Grothendieck beschrieb ein Beispiel einer Kategorie, welche er ω-Kategorie nannte. Das ist eine Kategorie, welche für jedes $n \in \omega$ die n-Zellen enthält. Sei X ein topologischer Raum. Sein Beispiel war die ω-Kategorie $\prod_\omega(X)$. Sie hat:

- Punkte $x \in X$ als 0-Zellen;
- Wege $w\colon [0,1] \to X$ als 1-Zellen;
- Homotopien von Wegen $[0,1]^2 \to X$ als 2-Zellen;
- Homotopien von Homotopien von Wegen $[0,1]^3 \to X$ als 3-Zellen usw.

Komposition ist Verknüpfen von Wegen bzw. Homotopien. Da damit alle $n > 0$-Zellen Isomorphismen sind, nannte er $\prod_\omega(X)$ den Fundamentalen ω-Groupoid. Es ist z.B. $\prod_1(X)$ der klassische Fundamental Groupoid.

Wie man an diesem Beispiel sieht ist alles nur bis auf eine Art von Äquivalenz (Homotopie) sinnvoll, da z.B. bereits die Verknüpfung von Wegen nur bis auf Homotopie assoziativ ist.

Viele interessante Beispiele

Heute bezeichnet man solche Kategorien (Vorsicht: es hat sich noch keine Definition von nur bis auf Homotopie durchgesetzt) als schwach. Andere Beispiele sind:

Viele interessante Beispiele

Heute bezeichnet man solche Kategorien (Vorsicht: es hat sich noch keine Definition von nur bis auf Homotopie durchgesetzt) als schwach. Andere Beispiele sind:

- ω-**TOP**, also topologische Räume mit stetigen Abbildung und Homotopien von stetigen Abbildungen und...

Viele interessante Beispiele

Heute bezeichnet man solche Kategorien (Vorsicht: es hat sich noch keine Definition von nur bis auf Homotopie durchgesetzt) als schwach. Andere Beispiele sind:

- ω-**TOP**, also topologische Räume mit stetigen Abbildung und Homotopien von stetigen Abbildungen und...
- ω-**ChCo**, also Kettenkomplexe mit Kettenabbildungen und Homotopien von Kettenabbildungen und...

Viele interessante Beispiele

Heute bezeichnet man solche Kategorien (Vorsicht: es hat sich noch keine Definition von nur bis auf Homotopie durchgesetzt) als schwach. Andere Beispiele sind:

- ω-**TOP**, also topologische Räume mit stetigen Abbildung und Homotopien von stetigen Abbildungen und...
- ω-**ChCo**, also Kettenkomplexe mit Kettenabbildungen und Homotopien von Kettenabbildungen und...

Ist die Welt gerecht, so gibt es einen schwachen ω-Funktor $\prod_\omega$.

Viele interessante Beispiele

Heute bezeichnet man solche Kategorien (Vorsicht: es hat sich noch keine Definition von nur bis auf Homotopie durchgesetzt) als schwach. Andere Beispiele sind:

- ω-**TOP**, also topologische Räume mit stetigen Abbildung und Homotopien von stetigen Abbildungen und...
- ω-**ChCo**, also Kettenkomplexe mit Kettenabbildungen und Homotopien von Kettenabbildungen und...

Ist die Welt gerecht, so gibt es einen schwachen ω-Funktor $\prod_\omega$.
Wegen einer großen Zahl weiterer Beispiele wurden und werden n-Kategorien intensiv studiert.

Das Periodensystem

Ein interessanter Effekt ist besonders zu erwähnen. Er beruht auf der Beobachtung von Jean Bénabou, nämlich das 2-Kategorien mit nur einem Objekt gerade die monoidalen sind.

Das Periodensystem

Ein interessanter Effekt ist besonders zu erwähnen. Er beruht auf der Beobachtung von Jean Bénabou, nämlich das 2-Kategorien mit nur einem Objekt gerade die monoidalen sind. Man bezeichnet eine $n+m$-Kategorie als m ausgeartet, wenn sie für alle $k < m$ nur eine k-Zelle enthält. Es ergibt sich das Periodensystem der n-Kategorien:

Das Periodensystem

Ein interessanter Effekt ist besonders zu erwähnen. Er beruht auf der Beobachtung von Jean Bénabou, nämlich das 2-Kategorien mit nur einem Objekt gerade die monoidalen sind. Man bezeichnet eine $n+m$-Kategorie als m ausgeartet, wenn sie für alle $k<m$ nur eine k-Zelle enthält. Es ergibt sich das Periodensystem der n-Kategorien:

	n=0	n=1	n=2
m=0	Mengen	Kategorien	2-Kategorien
m=1	Monoide	monoidale Kat.	monoidale 2-Kat.
m=2	komm. Monoide	verzopfte Kat.	verzopfte 2-Kat.
m=3	"	sym. mon. Kat.	sylleptische 2-Kat.
m=4	"	"	sym. mon. 2-Kat.
m=5	"	"	"

Das Periodensystem

Dieser Stabilisierungseffekt, d.h. das sich immer eine Zeile verschoben Symmetrie einstellt, ist bemerkenswert und setzt sich weiter fort. Wir erhalten damit:

Korollar

Für einen topologischen Raum X ist $\pi_k(X, x)$ abelsch für $k > 1$.

Das Periodensystem

Dieser Stabilisierungseffekt, d.h. das sich immer eine Zeile verschoben Symmetrie einstellt, ist bemerkenswert und setzt sich weiter fort. Wir erhalten damit:

Korollar

Für einen topologischen Raum X ist $\pi_k(X, x)$ abelsch für $k > 1$.

Beweis.

Wir setzen $n = 0$ und $m = k$ im Periodensystem. So besteht z.B. $\pi_2(X, x)$ aus dem Punkt x ($i = 0$), dem konstanten Weg ($i = 1$) und den stetigen Abbildungen $[0, 1]^2 \to X$. □

Es bleibt aber noch viel zu tun...

Vielen Dank für ihre Aufmerksamkeit!