

# MAT115.1: VORLESUNG GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK – DETAILS

DANIEL TUBBENHAUER

## Disclaimer

---

Bitte zögern Sie nicht mich im Falle von Fragen zu kontaktieren.

## Literatur

Ich folge dem ersten Kapitel von [AE06], bis auf in der letzten Vorlesung, wo ich einige (elementare) Konzepte aus [J03] bespreche.

## Wann und wo?

- ▶ Daten.
  - Jeden Montag 10:15-12:00.
  - Raum Y03G91, Universität Zürich, Institut für Mathematik.
  - Erste Vorlesung: 16.Sep.2019.
  - Letzte Vorlesung: 16.Dez.2019.
  - Ausnahme: Die Vorlesung am 02.Dez.2019 fällt aus.
- ▶ Übungen.
  - Jeden Donnerstag 13:00-13:45 (Leiterin: Wiktoria Zaton [zaton.wiktoria@gmail.com](mailto:zaton.wiktoria@gmail.com)) oder 14:00-14:45 (Leiter: Krzysztof Putyra [krzysztof.putyra@math.uzh.ch](mailto:krzysztof.putyra@math.uzh.ch)).
  - Anfangsbuchstaben A–K sind in der Übung 14:00-15:00; Anfangsbuchstaben L–Z in der Übung 13:00-14:00
  - Raum Y27H25, Universität Zürich, Institut für Mathematik.
  - Erste Übung: 19.Sep.2019.
  - Letzte Übung: 19.Dez.2019.
- ▶ Klausur.
  - Donnerstag den 23.Jan.2020, 9:00-12:00, Raum Y03G85.
  - Freitag den 24.Jan.2020, 13:00-15:00, Raum Y27J32.
  - Eine Probeklausur (aus dem letzten Jahr) mit einer Probeaufgabe (Aufgabe 8) ist hier online verfügbar.
- ▶ Website <http://www.dtubbenhauer.com/lecture-GdM-2019.html>

## Regeln für die Übungszettel.

- ▷ **Abgabe:** 23.Sep.2019 (erste Abgabe) bis 16.Dez.2019 (letzte Abgabe) vor der Vorlesung. In der Woche vom 02.Dez.2019 gibt es keine Übungen und auch keine Übungszettel.

- ▷ Die Übungen sind immer am Donnerstag, vom 19.Sep.2019 (erste) bis zum 19.Dez.2019 (letzte).
- ▷ Es wird 12 Übungszettel geben mit jeweils vier Aufgaben. Jede Aufgabe gibt 10 Punkte. Es gibt auch einen dreizehnten Übungszettel, welcher nicht bewertet wird.
- ▷ Sie brauchen insgesamt 240 Punkte um zu der Klausur zugelassen zu werden, und alle Übungszettel werden für die Klausur relevant sein.
- ▷ Alle Übungszettel sind jederzeit auf der Homepage  
<http://www.dtubbenhauer.com/lecture-GdM-2019.html>  
 verfügbar. Abzugeben ist aber immer nur ein Übungszettel.
- ▷ Schreiben Sie ihren Namen deutlich auf ihre Lösungen und heften Sie diese zusammen. Abgabe erfolgt alleine oder zu zweit.
- ▷ Zur Lösung dürfen nur Aussagen aus der Vorlesung verwendet werden und keine Aussagen aus anderen Vorlesungen.
- ▷ Tippfehler auf den Übungszetteln können nie ausgeschlossen werden.

### Zeitplan und Details.

- ▷ Erste Vorlesung “Etwas Logik”.
  - **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
  - **Datum.** 16.Sep.2019, 10:15–12:00.
  - **Keywords.** Grundlagen der Logik, Implikationen, Beweismethoden.
  - **Ziele.** Grundlagen der Aussagenlogik: Aussagen, Negationen, Konjunktionen, Disjunktionen, Wahrheitstafeln. Danach Eigenschaften und Quantoren, und erste Folgerungen z.B. doppelte Negation [AE06, Beispiel I.1.1 und Bemerkung I.1.2]. Dann werden Implikationen besprochen: Hinreichend, notwendig, Kontraposition etc. Zum Schluss kommt noch Satzstruktur dran (Voraussetzung, Behauptung, Beweis) und elementare Beweismethoden (direkte und indirekte Beweise).
  - **Bemerkung.** Zu Beginn der Vorlesung werden auch einige Formalitäten besprochen.
  - **Literatur.** [AE06, Sektion I.1].
- ▷ Zweite Vorlesung “Naive Mengenlehre I”.
  - **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
  - **Datum.** 23.Sep.2019, 10:15–12:00.
  - **Keywords.** Grundlagen der Mengenlehre, Mengenoperationen, Regeln von De Morgan.
  - **Ziele.** Zuerst werden Menge naiv eingeführt und einige elementare Definitionen erwähnt, z.B. Untermenge, Obermenge. Eigenschaften der leeren Menge [AE06, Bemerkung I.2.1]. Danach kommen weitere elementare Mengeoperationen dran: Potenzmenge, Komplemente, Durchschnitte, Vereinigungen, Venn Diagramme

[AE06, Bemerkung I.2.3]. Dann einige Rechenregeln [AE06, Satz I.2.4], und Produktmengen und ihre elementaren Eigenschaften [AE06, Satz I.2.6]. Zum Schluss Mengensysteme und ihre Rechenregeln [AE06, I.2.7].

- **Bemerkung.** Die Mengenlehre, welche besprochen wird, ist naiv: Formal gesehen sollte man alles über Axiome einführen, aber das führt zu weit.
- **Literatur.** [AE06, Sektion I.2].

▷ Dritte Vorlesung “Naive Mengenlehre II”.

- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
- **Datum.** 30.Sep.2019, 10:15–12:00.
- **Keywords.** Abbildungen, injektiv, surjektiv, bijektiv.
- **Ziele.** Definition vom Begriff Abbildung [AE06, Bemerkung 1.3.1] und weitere grundlegende Begriffe wie Wertevorrat, Definitionsbereich, Zielmenge, Graph etc. Danach kommen einige einfache Beispiele [AE06, Beispiele I.3.2] wie z.B. die leere Abbildung oder die Identitätsabbildung, und einige Abbildungskonstruktionen wie die eingeschränkte Abbildung. Dann kommt die Komposition von Abbildungen [AE06, Satz I.3.3] und einige Grundlagen über kommutative Diagramme. Dann elementare Eigenschaften von Abbildungen (injektiv, Urbild etc.) und die Umkehrabbildung [AE06, Sätze I.3.5 und I.3.6]. Zum Schluss Mengenabbildungen [AE06, Satz I.3.8] und die Menge der Abbildungen.
- **Bemerkung.** Auch Abbildungen sind Mengen, aber so arbeitet man nicht mit ihnen.
- **Literatur.** [AE06, Sektion I.3].

▷ Vierte Vorlesung “Naive Mengenlehre III”.

- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
- **Datum.** 07.Okt.2019, 10:15–12:00.
- **Keywords.** Relationen, Ordnungen, Äquivalenzklassen.
- **Ziele.** Definition einer Relation als Menge, danach einige elementare Begriffe (reflexiv etc.) und die Definition einer Äquivalenzrelation. Danach die Zerlegungseigenschaft von Äquivalenzrelation [AE06, Satz I.4.1] und die induzierte Abbildung [AE06, Beispiele I.4.2(c)]. Dann geordnete Mengen via Ordnungsrelationen und grundlegende Begriffe wie Minimum, Schranke (welche im Allgemeinen nicht existieren müssen [AE06, Bemerkung I.4.5]). Dann Abbildungen auf geordneten Mengen und ihre Grundbegriffe (z.B. steigend), und zum Schluss noch ein paar Details zu Verküpfungen auf Mengen z.B. die Eindeutigkeit der 1 [AE06, Satz I.4.11].
- **Bemerkung.** Auch Relationen sind Menge. Aber auch hier gilt, dass man meist nicht so mit ihnen umgeht.
- **Literatur.** [AE06, Sektion I.4].

▷ Fünfte Vorlesung “Die natürlichen Zahlen I”.

- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
  - **Datum.** 14.Okt.2019, 10:15–12:00.
  - **Keywords.** Peano Arithmetik, grundlegenden Axiome.
  - **Ziele.** Einführung der Peano Axiome mit einigen Kommentaren und Regeln [AE06, Bemerkungen I.5.1 und I.5.2]. Dann der Hauptsatz bzgl. Addition und Multiplikation auf  $\mathbb{N}_0$  [AE06, Theorem I.5.3]. (Der Beweis ist lang.) Zum Schluss noch kurz der Euklidsche Algorithmus [AE06, Satz I.5.4].
  - **Bemerkung.** Vorsicht: Klar sind alle Aussagen trivial, aber der Punkt ist diese aus den gegebenen Axiomen zu beweisen.
  - **Literatur.** [AE06, Sektion I.5] bis einschliesslich [AE06, Satz I.5.4].
- ▷ Sechste Vorlesung “Die natürlichen Zahlen II”.
- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
  - **Datum.** 21.Okt.2019, 10:15–12:00.
  - **Keywords.** Das Induktionsprinzip.
  - **Ziele.** Zuerst kommt der Wohlordnungssatz für  $\mathbb{N}_0$  [AE06, Satz I.5.5], und eine Anwendung davon [AE06, Satz I.5.6]. Dann kommt das Induktionsprinzip [AE06, Satz I.5.7] und eine Variante davon [AE06, Satz I.5.9]. Zum Schluss noch einige Beispiele zur Induktion [AE06, Beispiele I.5.8].
  - **Bemerkung.** Vorsicht: Induktion ist ein Axiom.
  - **Literatur.** [AE06, Sektion I.5] von [AE06, Satz I.5.5] bis einschliesslich [AE06, Satz I.5.9].
- ▷ Siebte Vorlesung “Die natürlichen Zahlen III”.
- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
  - **Datum.** 28.Okt.2019, 10:15–12:00.
  - **Keywords.** Beispiele, Rekursionen.
  - **Ziele.** Wir starten mit weiteren Beispielen für das Induktionsprinzip. Insbesondere, das man mit Klammern nicht vorsichtig sein muss [AE06, Beispiel I.5.10]. Dann kommt eine wichtige Variante der Induktion, genannt Rekursion [AE06, Satz I.5.11]. Dazu [AE06, Beispiel I.5.12]. Zum Abschluss noch mehrfache Summen und Produkte und deren Rechenregeln [AE06, Bemerkung I.5.13]. Rekursive kann dann die Potenz und die Fakultät definiert werden [AE06, Beispiele I.5.14].
  - **Bemerkung.** Das Rekursionsprinzip ist wichtig in vielen Anwendungen, aber auch ein Axiom im gewissen Sinne.
  - **Literatur.** [AE06, Sektion I.5] von [AE06, Satz I.5.10] bis zum Ende.
- ▷ Achte Vorlesung “Naive Mengenlehre IV”.
- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
  - **Datum.** 04.Nov.2019, 10:15–12:00.

- **Keywords.** Abzählbarkeit, Satz von Cantor.
- **Ziele.** Zuerst wird naiv der Begriff der Anzahl der Elemente einer Menge definiert und gezeigt, dass  $\mathbb{N}_0$  unendlich viele Elemente hat [AE06, Beispiele I.6.1]. Dann wird der Begriff der Mächtigkeit definiert und was es heißt abzählbar zu sein [AE06, Bemerkung 6.4]. Dann kommt der Satz von Cantor [AE06, Theorem I.6.5], gefolgt von einigen Aussagen über abzählbare Mengen [AE06, Sätze I.6.7, I.6.8 und I.6.9]. Zum Abschluss noch ein Beispiel einer überabzählbaren Menge [AE06, Satz I.6.11].
- **Bemerkung.** Beachten Sie, dass Kardinalität eigentlich auch eine Menge ist.
- **Literatur.** Teile von [AE06, Sektion I.6].

▷ Neunte Vorlesung “Die rationalen Zahlen I”.

- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
- **Datum.** 11.Nov.2019, 13:15–15:00.
- **Keywords.**  $\mathbb{Z}$ , Definition durch Äquivalenzklassen.
- **Ziele.** Kurz die Definition, was ein Ring ist, und danach einige elementare Begriffe und Eigenschaften von Ringen z.B. [AE06, Bemerkungen I.8.1]. Dann einige Beispiele und weitere Grundbegriffe [AE06, Beispiele I.8.2], und dann der binomische Lehrsatz [AE06, Satz I.8.4]. Zuletzt wird  $\mathbb{Z}$  aus  $\mathbb{N}_0$  definiert bzw. konstruiert [AE06, Theorem I.9.1]. (Der Beweis ist lang.)
- **Bemerkung.** Der Begriff des Ringes wird im Buch verwendet, aber man braucht ihn für die Definition nicht unbedingt. Trotzdem ist er hilfreich.
- **Literatur.** Teile von [AE06, Sektion I.8] (bis einschliesslich [AE06, Satz I.8.4]), [AE06, Sektion I.9] bis einschliesslich [AE06, Theorem I.9.1].

▷ Zehnte Vorlesung “Die rationalen Zahlen II”.

- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
- **Datum.** 18.Nov.2019, 10:15–12:00.
- **Keywords.**  $\mathbb{Q}$ , Definition via Quotientenkörper.
- **Ziele.** Zuerst wird der Begriff des Körpers eingeführt und einige elementare Beobachtungen festgehalten [AE06, Bemerkungen I.8.7]. Dann kommt die Konstruktion von  $\mathbb{Q}$  aus  $\mathbb{Z}$  [AE06, Theorem I.9.2]. (Der Beweis ist lang.) Zum Schluss werden noch einige einfache Aussagen über  $\mathbb{Q}$  gemacht, z.B. [AE06, Satz I.9.4],
- **Bemerkung.** Der Begriff des geordneten Körpers wird nicht vor der nächsten Vorlesung verwendet.
- **Literatur.** Teile von [AE06, Sektion I.8] (Körper und [AE06, Bemerkungen I.8.7]), [AE06, Sektion I.9] von [AE06, Theorem I.9.2] bis einschliesslich [AE06, Satz I.9.4].

▷ Elfte Vorlesung “Die reellen Zahlen I”.

- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.

- **Datum.** 25.Nov.2019, 10:15–12:00.
- **Keywords.** Geordnete Körper, Dedekind Schnitte.
- **Ziele.** Zuerst wird ein geordneter Körper definiert, und einige grundlegende Eigenschaften dieser Körper gezeigt [AE06, Sätze I.8.9 und I.8.10 und Korollar I.8.11]. Erstes Beispiel ist  $\mathbb{Q}$  [AE06, Theorem I.9.5]. Dann kommt das Vollständigkeitsaxiom [AE06, Satz I.10.1] und das  $\mathbb{Q}$  dieses nicht erfüllt [AE06, Beispiel I.10.3]. Dann kommt die Konstruktion von  $\mathbb{R}$  mittels Dedekindscher Schnitten [AE06, Theorem I.10.4]. (Der Beweis ist lang.) Zum Schluss Infimum und Supremum [AE06, Satz I.10.5].
- **Bemerkung.** Zu diesem Termin gibt es einen Ersatzsprecher.
- **Literatur.** Teile von [AE06, Sektion I.8] und [AE06, Sektion I.9] (geordnete Körper und [AE06, Theorem I.9.5]), [AE06, Sektion I.10] bis einschliesslich [AE06, Satz I.10.5].

▷ Zwölfte Vorlesung “Die reellen Zahlen II”.

- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
- **Datum.** 09.Dez.2019, 10:15–12:00.
- **Keywords.** Satz von Archimedes, Dichtheit, Intervalle.
- **Ziele.** Angefangen wird mit dem Satz von Archimedes [AE06, Satz I.10.6], dann wird die Dichtheit von  $\mathbb{Q}$  in  $\mathbb{R}$  besprochen [AE06, Sätze I.10.7 und I.10.11]. Dann werden Intervalle eingeführt und einige Grundbegriffe für diese. Zum Schluss kommt die Intervallschachtelung [AE06, Aufgabe I.10.15].
- **Bemerkung.** Der Satz von Archimedes wird auch manchmal als archimedische Axiom bezeichnet.
- **Literatur.** [AE06, Sektion I.10] von [AE06, Satz I.10.6] bis einschliesslich [AE06, Satz I.10.5]. (Wurzeln werden ausgelassen, bzw. kommen ganz zum Schluss.)

▷ Dreizehnte Vorlesung “Nicht ganz so naive Mengenlehre”.

- **Vortragender.** Daniel Tubbenhauer.
- **Datum.** 16.Dez.2019, 10:15–12:00.
- **Keywords.** Formale Mengenlehre, z.B. Russelsche Antimonie, Auswahlaxiom, Wohlordnungssatz, Lemma von Zorn.
- **Ziele.** Zuerst die Russelsche Antimonie [J03, §I.1.11]. Dann die Definitionen von Zermelo–Fraenkel [J03, §I.1.1 bis §I.1.8]. Dann das Auswahlaxiom [J03, §I.1.9] und [J03, Anfang von Sektion I.5], dann das Wohlordnungsprinzip [J03, Theorem I.5.1] und zum Schluss das Lemma von Zorn [J03, Theorem I.5.4]. Beide sind äquivalent zum Auswahlaxiom, aber das wird nicht gezeigt.
- **Bemerkung.** Der Stoff ist schwer verdaulich, aber es ist wichtig zu wissen, dass man auch Mengen formal einführen kann.
- **Literatur.** [J03, Sektion I.1], allerdings weniger formal. Teile von [J03, Sektion I.5] (Auswahlaxiom und [J03, Theoreme I.5.1 und I.5.4]).

## REFERENCES

- [AE06] H. Amann; J. Escher. *Analysis. I*. Dritte Auflage. Grundstudium Mathematik. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [J03] T. Jech. *Set theory*. The third millennium edition, revised and expanded. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.

D.T.: INSTITUT FÜR MATHEMATIK, UNIVERSITÄT ZÜRICH, WINTERTHURERSTRASSE 190, CAMPUS IRCHEL,  
OFFICE Y27J32, CH-8057 ZÜRICH, SWITZERLAND, [WWW.DTUBBENHAUER.COM](http://WWW.DTUBBENHAUER.COM)  
*Email address:* [daniel.tubbenhauer@math.uzh.ch](mailto:daniel.tubbenhauer@math.uzh.ch)