

AUFGABEN 9: VORLESUNG GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

Aufgabe 1. Eine nach unten (oben) gerichtete Wohlordnung auf einer Menge X ist eine totale Ordnung, bei der jede nichtleere Teilmenge von X ein kleinstes (größtes) Element bezüglich dieser Ordnung hat.

- (a) Sei X eine endliche Menge. Finden Sie eine Wohlordnung auf X .
- (b) Finden Sie eine Wohlordnung auf $X = \mathbb{N}_0$.
- (c) Finden Sie eine Wohlordnung auf $X = \mathbb{Z}$.
- (d) Finden Sie eine Wohlordnung auf $X = \mathbb{Z}^n$ für $n \geq 1$.
- (e) Sei $X = \{1, 2\}$. Finden Sie eine Wohlordnung auf $\mathfrak{P}(X)$.

In den Fällen (a) bis (d) ist immer sowohl eine nach unten gerichtete, als auch eine nach oben gerichtete Wohlordnung anzugeben.

Aufgabe 2. Fixiere drei ganzen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Welche Bedingung muss c erfüllen, damit es ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$ gibt mit $ax + by = c$. Beweisen Sie ihre Behauptung.

Aufgabe 3. Zeigen Sie:

- (a) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $n\mathbb{Z} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ ein Ideal in \mathbb{Z} , d.h. eine Teilmenge so, dass $x + y \in n\mathbb{Z}$ und $z_1xz_2 \in n\mathbb{Z}$ für alle $x, y \in n\mathbb{Z}$ und $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ gilt.
- (b) $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq 2$ ist genau dann eine Primzahl, falls es keine zwei Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, $z_1, z_2 \notin n\mathbb{Z}$ gibt so, dass $z_1z_2 \in n\mathbb{Z}$.
- (c) $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq 2$ ist genau dann eine Primzahl, falls es für alle Zahlen $z_1 \in \mathbb{Z}$ mit $z_1 \notin n\mathbb{Z}$ eine Zahl $z_2 \in \mathbb{Z}$ gibt so, dass $(z_1z_2 - 1) \in n\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4. Definiere rekursive eine Abbildung $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ durch $f(1) = 1$, $f(2) = 1$ und $f(n+1) = f(n) + f(n-1)$ für $n > 2$. Die Zahlen $f(n)$ heißen Fibonacci Zahlen. Wenden Sie auf zwei aufeinander folgende Fibonacci Zahlen den euklidischen Algorithmus an. Welche Gesetzmäßigkeit tritt auf? (Beschreiben Sie diese mit Beweis.)

Abgabe: 18.Nov.2019 in den Übungen. **Rückgabe:** 21.Nov.2019 in den Übungen.