AUFGABEN 5: VORLESUNG GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

Aufgabe 1. Sei X eine Menge und sei $\mathfrak{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Zeigen Sie:

(a) $(\mathfrak{P}(X), \subset)$ ist eine geordnete Menge.

(b) $(\mathfrak{P}(X), \subset)$ ist genau dann eine total geordnete Menge wenn $X = \emptyset$ oder $X = \{a\}$ gilt.

Aufgabe 2. Sei X eine Menge, und sei $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ eine Teilmenge von $\mathfrak{P}(X)$. Zeigen Sie, dass $\sup(\mathfrak{A}) = \bigcup \mathfrak{A}$ und $\inf(\mathfrak{A}) = \bigcap \mathfrak{A}$ gilt.

Aufgabe 3. Seien $(\mathbb{N}_0^1, 0_1, \nu_1)$ und $(\mathbb{N}_0^2, 0_2, \nu_2)$ zwei Mengen welche die Peano Axime erfüllen. Das heisst für $i \in \{1, 2\}$ ist $\mathbb{N}_0^i$ eine Menge mit einem ausgezeichneten Element 0_i und $\nu_i \colon \mathbb{N}_0^i \to \mathbb{N}_0^i \setminus \{0_i\}$ eine injektive Abbildung welche

$$(\star)\colon\ ((0_i \in N_i \subset \mathbb{N}_i) \wedge (n_i \in N_i \Rightarrow \nu_i(n_i) \in N_i)) \Rightarrow N_i = \mathbb{N}_i$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass es dann eine Bijektion $\phi\colon \mathbb{N}_0^1 \to \mathbb{N}_0^2$ mit $\phi(0_1) = 0_2$ und $\nu_2 \circ \phi = \phi \circ \nu_1$ gibt. (Das heißt $\mathbb{N}_0$ ist eindeutig bis auf Isomorphie.)

Aufgabe 4. Seien $(\mathbb{N}_0^1, 0_1, \nu_1)$ und $(\mathbb{N}_0^2, 0_2, \nu_2)$ wie in Aufgabe 3 nur, dass $(\star)$ nicht umbedingt gilt. Muss dann auch eine Bijektion wie in Aufgabe 3 existieren? Begründen Sie ihre Antwort.

Abgabe: 21.Okt.2019 vor der Vorlesung. **Rückgabe**: 24.Okt.2019 in den Übungen.